Filtro de Kalman

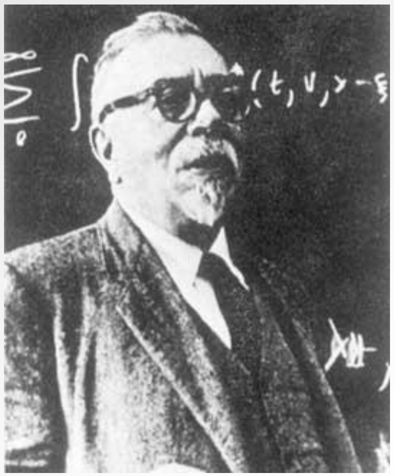
Teoria e Aplicação para Iniciantes

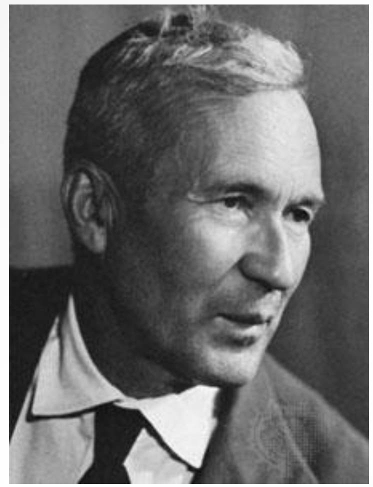
Prof. Dr. Marco Antonio Leonel Caetano

M&V Consultoria e Treinamento

www.mudancasabruptas.com.br

A História da Filtragem de Sinais





1930

Filtro de Wiener (contínuo)

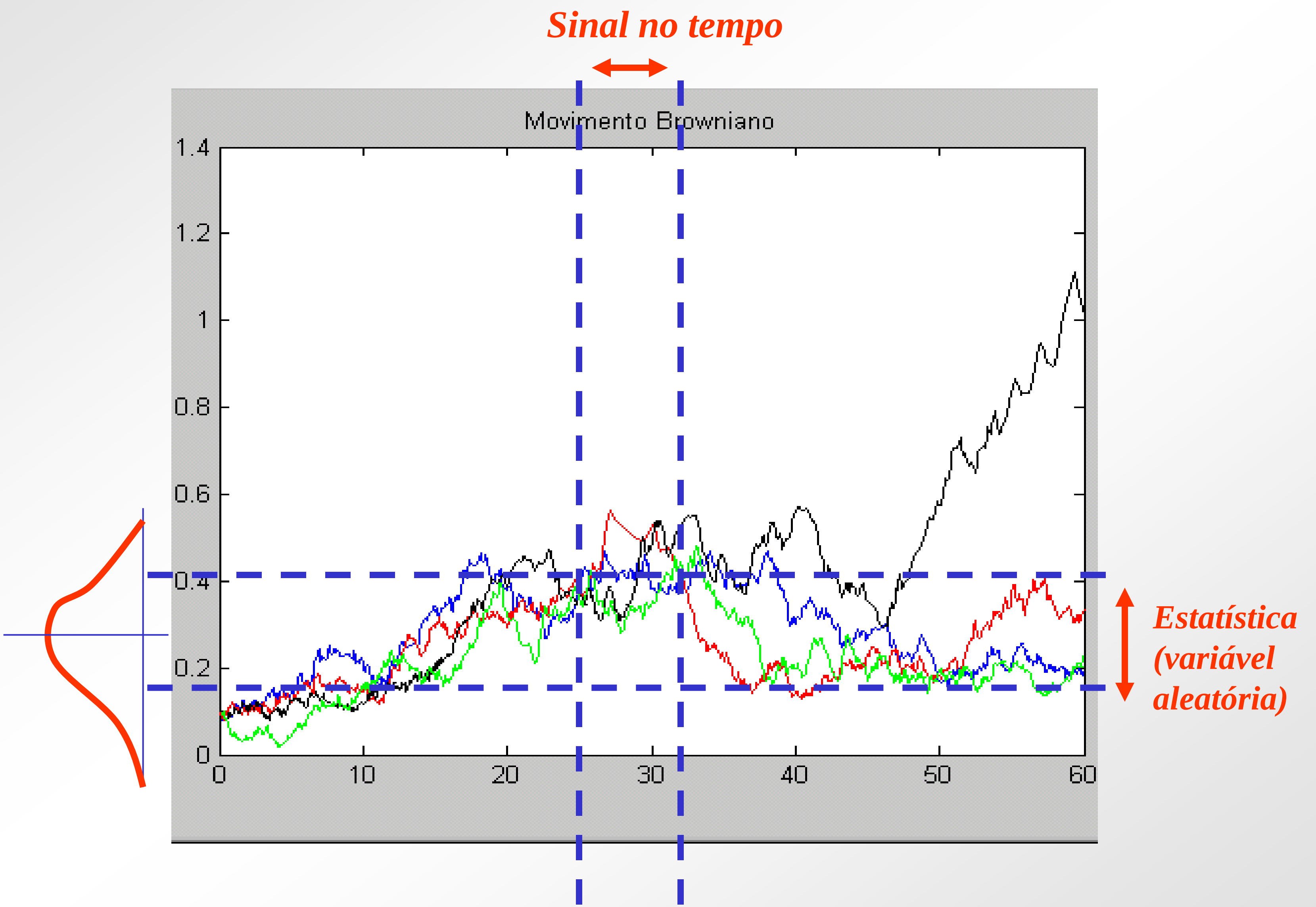
1940

Filtro de Kolmogorov (discreto)

1960

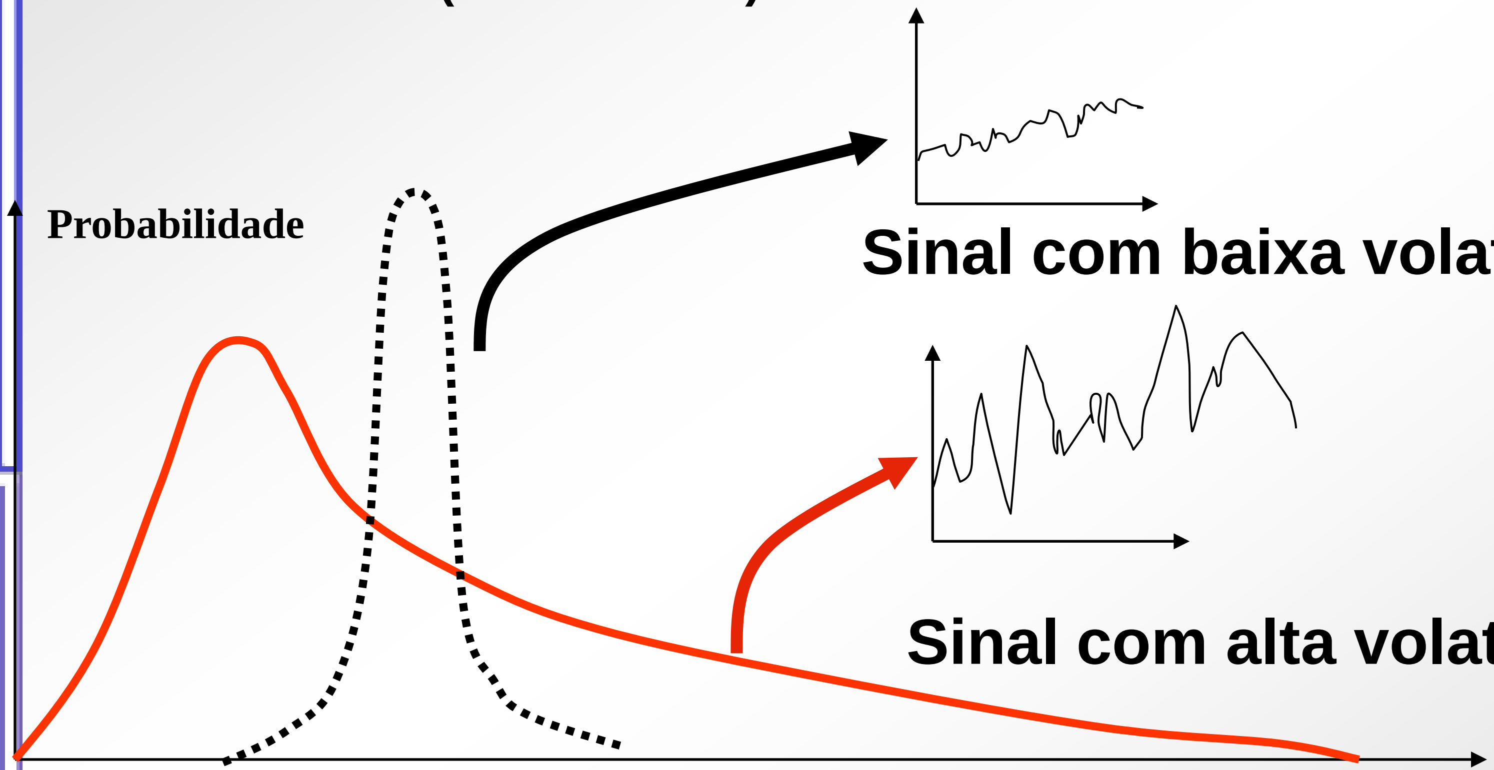
Filtro de Kalman (linear e estendido)

Processos Estocásticos



O que caracteriza um sinal?

- Média
- Desvio Padrão (volatilidade)



Marco Antonio Leonel Caetano

Resolvendo Sistema Linear

Observar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Para resolver seguem-se duas maneiras diferentes:

(1) Isolar x1 da primeira equação e substituir na segunda.
(2) Transformar o sistema em matrizes e vetores.

Primeira Resolução

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

(a) Isolando x1 na primeira equação:

$$x_1 = \frac{4 - 2x_2}{5}$$

(b) Substituindo na segunda equação:

$$2\left(\frac{4 - 2x_2}{5}\right) - x_2 = 1$$

$$\Rightarrow$$

$$8 - 4x_2 - 5x_2 = 5$$

$$\Rightarrow$$

$$-9x_2 = -3$$

$$\Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

(c) Substituindo x2 em x1 isolado em (a):

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

Solução: $x_1 = \frac{2}{3}$ $\quad x_2 = \frac{1}{3}$

Segunda Resolução

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

(a) Transformar o sistema em representação matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\textbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\textbf{B}}$$

(b) Resolve-se agora o sistema : AX = B

(c) A solução deve envolver a inversa da matriz A, ou seja, A^{-1}

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

(d) Como A^{-1}.A é matriz identidade a solução será: $X = A^{-1}B$

(e) No matlab basta : x = inv(A)*B

No Matlab

```
>> A=[5 2; 2 -1 ]

A =

     5     2
     2    -1

>> B=[4 1]

B =

     4     1

>> B=B'

B =

     4
     1

>> x = inv(A)*B
```

B tem que ser transposto! Ou B = [4 ; 1]

```
x =

    0.6667
    0.3333
```

Problema com dimensão de matrizes

Resolver sistema linear com mesmo número de linhas e colunas é fácil usando matlab. Mas quando se tem MAIS equação que incógnita a inversa da matriz não é possível.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

3 equações

2 incógnitas (x1,x2)

```
>> a=[2 1;3 2; 1 1]

a =

     2     1
     3     2
     1     1

>> inv(a)
??? Error using ==> inv
Matrix must be square.
```

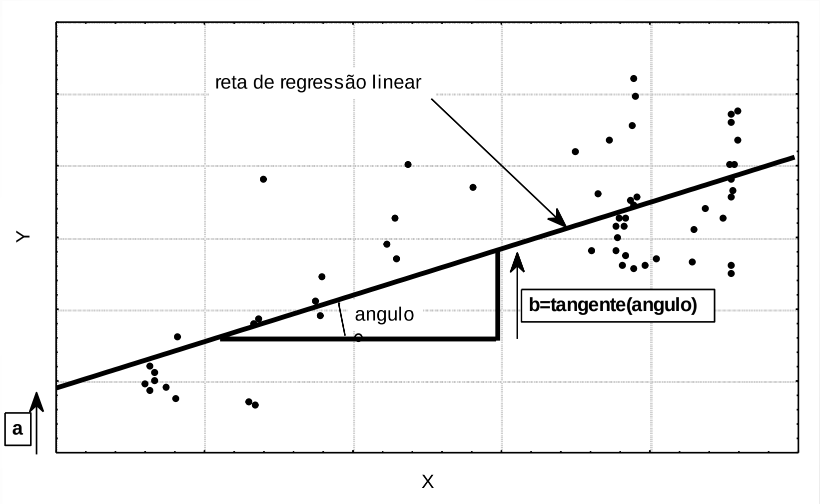
????

Método dos Mínimos Quadrados

A solução para o problema anterior é encontrar o vetor x mais próximo possível tal que o sistema AX = B seja o mais verdadeiro possível!

Deve-se encontrar o vetor x cujo erro do sistema seja o menor possível ao quadrado. Por isso o método se chama MÍNIMOS QUADRADOS.

Exemplo:



Reta que mais se aproxima dos pontos amostrados

Os resíduos dessa diferença são os menores possíveis quando elevados ao quadrado.

Consultoria Treinamento
M & V
Marco Antonio Leonel Caetano

A Estimativa do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

$$\begin{aligned}
&Seja\\
&A\vec{x} = B\\
&\Rightarrow\\
&A^T A\vec{x} = A^T B\\
&\Rightarrow\\
&\underbrace{\left(A^T A\right)^{-1}.\left(A^T A\right)}_{\text{identidade}}.\vec{x} = \left(A^T A\right)^{-1}.A^T B
\end{aligned}$$

Logo, para encontrar o vetor x mais próximo possível da solução:

$$\boxed{\vec{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T B}$$

Aplicação dos MMQ à medidas

Imaginar que duas variáveis foram acompanhadas por 3 dias e tiveram seus valores relacionados na tabela a seguir:

medida1	medida 2
0,10	13
0,18	22
0,28	36

Suponha que exista a seguinte relação entre as medidas:

$$medida_1 \times k = medida_2$$

Como estimar k?

Solução via MMQ

$$0{,}10k = 13$$
$$0{,}18k = 22$$
$$0{,}28k = 36$$

Sistema com 3 equações e 1 incógnita

Neste caso as matrizes A e B serão:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}18 \\ 0{,}28 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 22 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Então, lembrando que o x nesse problema é o valor de k e:

$$\boxed{\vec{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T B}$$

Qual a solução?

Solução

(a) $$A^T A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}18 & 0{,}28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}18 \\ 0{,}28 \end{pmatrix} = 0{,}1208$$

(b) $$A^T B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}18 & 0{,}28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}18 \\ 0{,}28 \end{pmatrix} = 15{,}34$$

Assim,

$$\boxed{k = \frac{1}{0{,}1208} 15{,}34 \approx 127}$$

A Solução Numérica

```
>> A=[0.1; 0.18; 0.28];
>> B=[13; 22; 36];
>> k=inv(A'*A)*A'*B

k =

   126.9868
```

$$\vec{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T B$$

Estimativa de parâmetros - Ajuste de Função

Dada uma tabela de dados

$$\begin{bmatrix} X: & x_1 & x_2 & x_3 \\ Y: & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

Deseja-se encontrar a melhor função linear que ajuste y aos valores de x:

$$y = c_0 + c_1 x$$

Observando que os dados são inseridos na função da seguinte forma:

$$y(i) = c_0 + c_1 x(i)$$

O sistema a ser resolvido é:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

A **X** **B**

Exercício

Fazer um programa para entrar com n valores de x e de y e no final o programa deve ajustar a função linear pelo método dos mínimos quadrados. Use como exemplo a tabela a seguir:

X	0	3	6
Y	1	4	5

```
clear
n = input('qtde de pares de valores = ');

%-------------------------------------
for i = 1:n
    A(i,1)=1;
    A(i,2)=input('valor de x=');
    B(i,1)=input('valor de y=');
end

%--------------------------------------
coeficientes=inv(A'*A)*A'*B
%--------------------------------------------
```

Solução

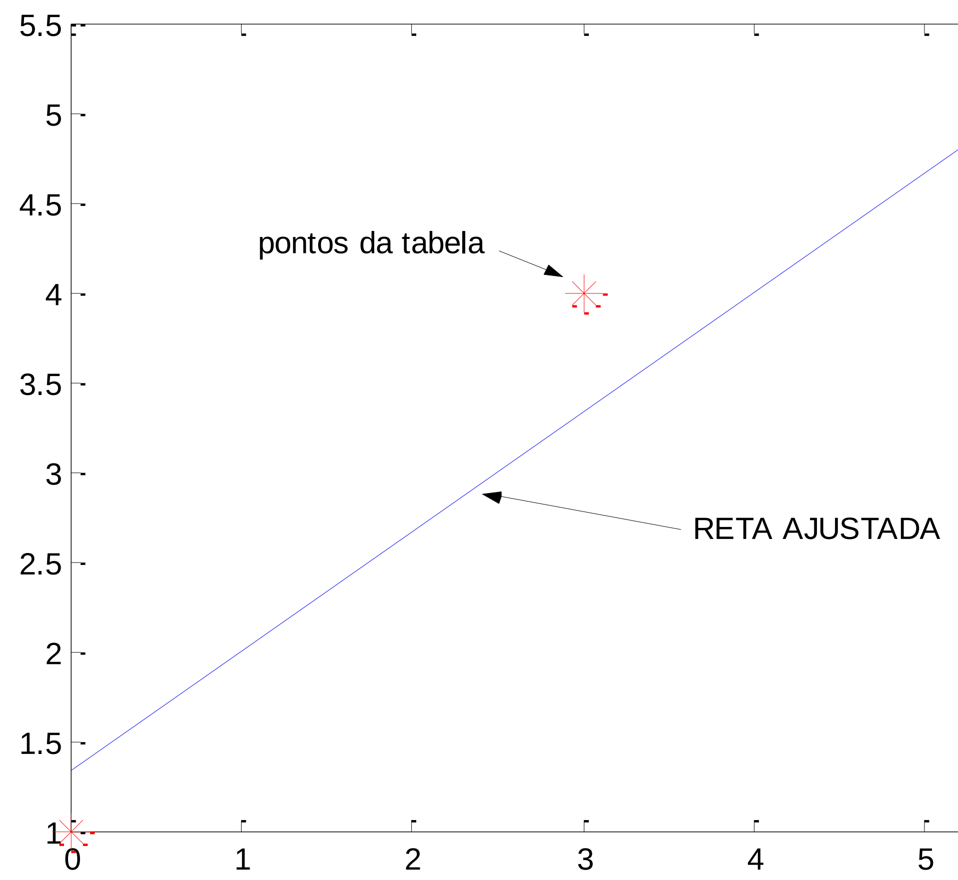
```
coeficientes =

    1.3333
    0.6667
```

Exercício

Modificar o programa anterior para fazer o gráfico dos pontos da Tabela e dos pontos da reta ajustada y(i) = c0 + c1* x(i)

```
clear
n = input('qtde de pares de valores = ');

%-----------------------------------------
for i = 1:n
    A(i,1)=1;
    A(i,2)=input('valor de x=');
    B(i,1)=input('valor de y=');
end

%------------------------------------------
coef=inv(A'*A)*A'*B
%-------------------------------------------
% FUNCAO AJUSTADA

for i=1:n
    y(i)=coef(1)+coef(2)*A(i,2);
end

plot(A(:,2),B,'.r',A(:,2),y,'-b')
```

Solução



Estimação Recursiva

Considere o problema da estimativa de uma constante escalar não Aleatória baseada em k medidas anteriores, corrompidas por ruído:

$$z_i = x + v_i \qquad\qquad i = 1,2,3,\ldots,k$$

onde vi é ruído branco gaussiano (média zero e desvio padrão fixo).

Qual a melhor estimativa para x?

A média é a melhor estimativa para x!

$$\hat{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} z_i}{k}$$

Para uma medida adicional (k+1) a nova estimativa será

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} z_i}{k+1}$$

Deve-se manipular os termos para deixar a estimativa sempre em função das medidas anteriores:

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} z_i + z_{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i + z_{k+1}\right)$$

média

$$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i + z_{k+1}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}+1}\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{k}} + \frac{\mathrm{z}_{\mathrm{k}+1}}{\mathrm{k}+1}$$

Somando-se e subtraindo $\dfrac{\hat{x}_k}{k+1}$

$$\hat{x}_{k+1} = \underbrace{\frac{k}{k+1}\hat{x}_k + \frac{1}{k+1}\hat{x}_k}_{} + \frac{1}{k+1} z_{k+1} - \frac{1}{k+1}\hat{x}_k$$

$$= \hat{x}_k + \frac{1}{k+1}\left(z_{K+1} - \hat{x}_k\right)$$

Estimação recursiva de variáveis

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\text{Ganho do Sistema}} \cdot \underbrace{\left(z_{k+1} - \hat{x}_k\right)}_{\text{informação ainda não utilizada}}$$

Exemplo

Estimar a constante "a=10" com ruído de medida v (média = 0, desvio=5) para 100 medidas de "a".

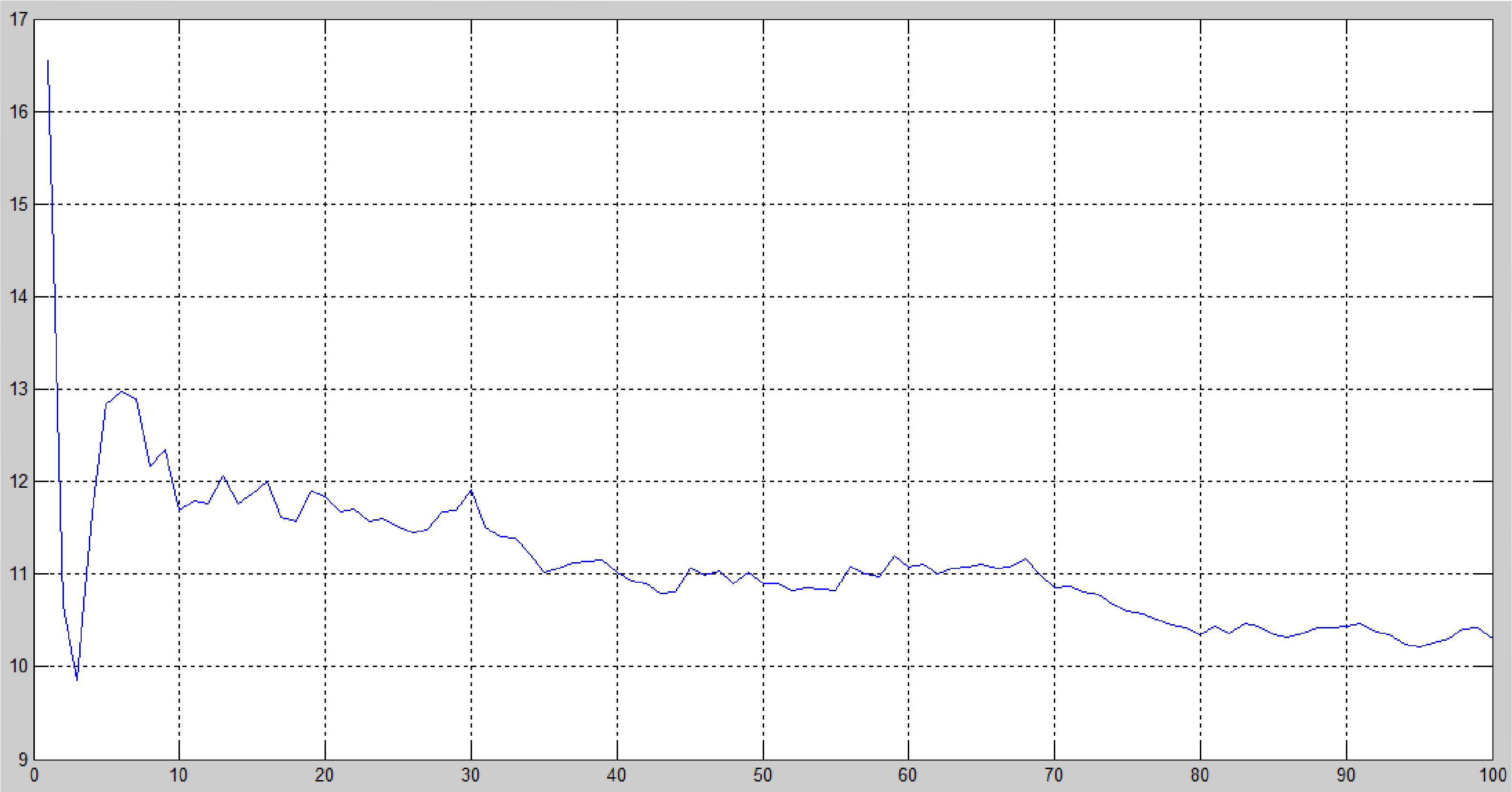
```
clear all
clc
%CONSTANTE A SER ESTIMADA
a=10;

% MEDIDAS COM ERRO
z=a+5*randn(100,1);
% EIXO DO TEMPO PARA GRAFICO
t=1:length(z);
```

Programando a fórmula do mínimos quadrados recursivo:

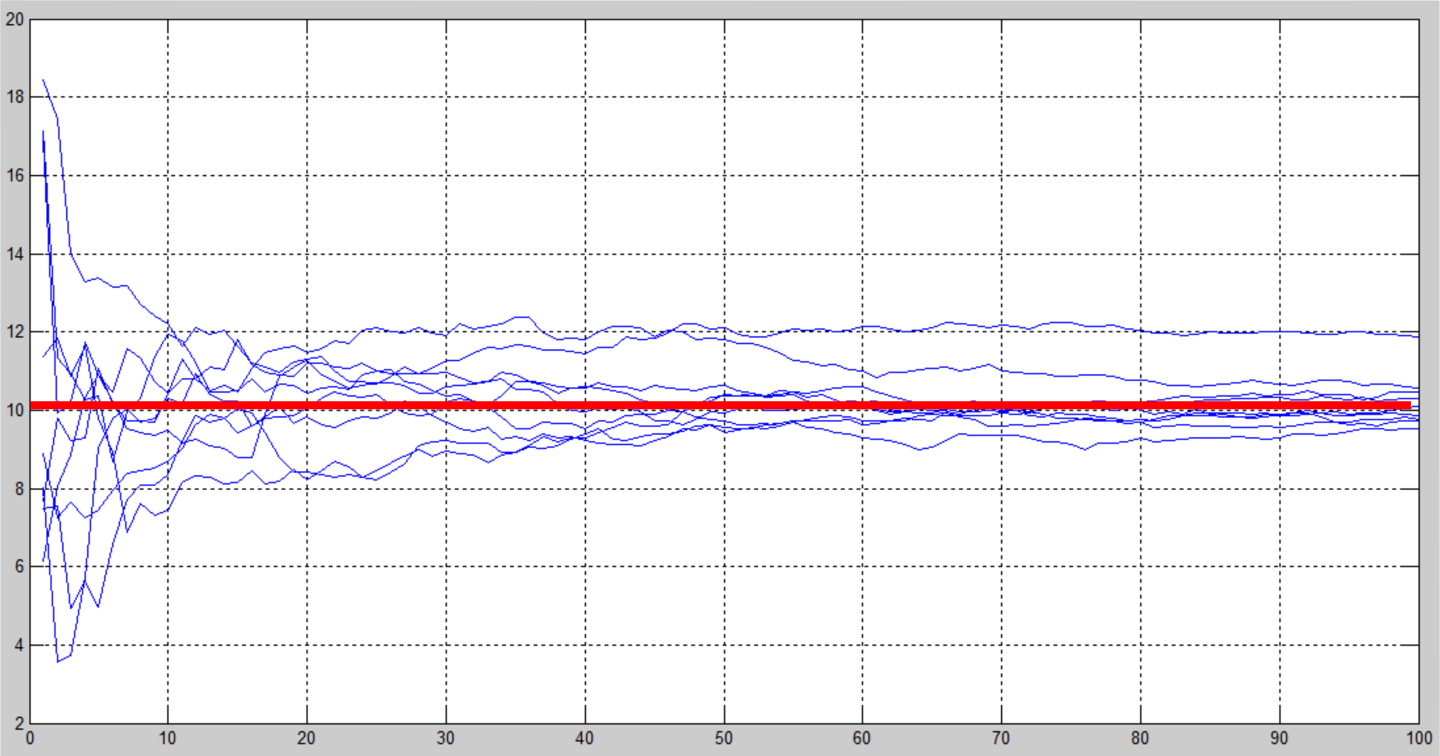
```
% ESTIMACAO RECURSIVA

x(1)=z(1);

for i=1:length(z)-1
    x(i+1)=x(i)+(z(i+1)-x(i))/(i+1)
end
plot(t,x)

```

Consultoria Treinamento
M & V
Marco Antonio Leonel Caetano

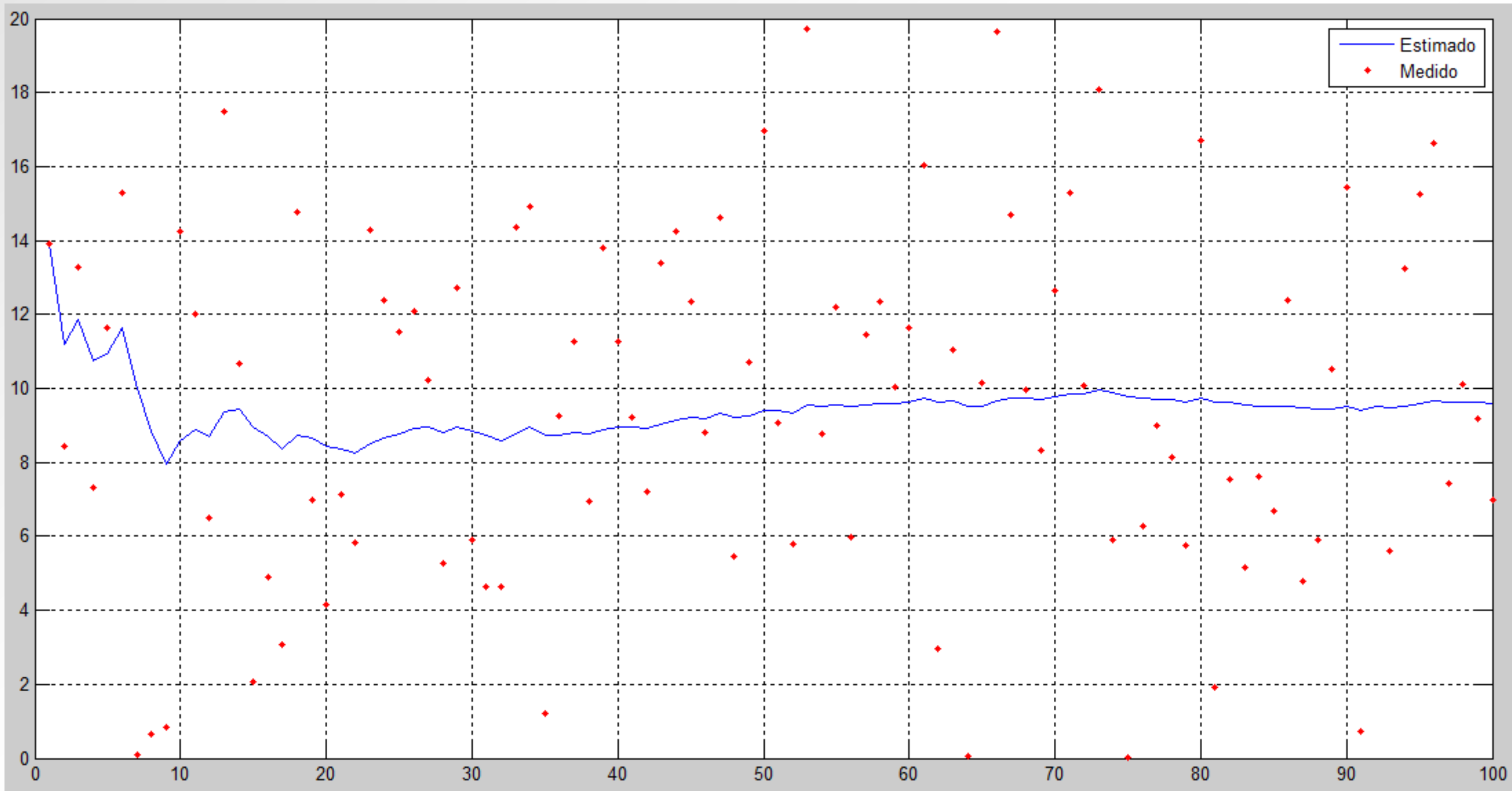
Resultado



Para “n” simulações



Comparando com as medidas



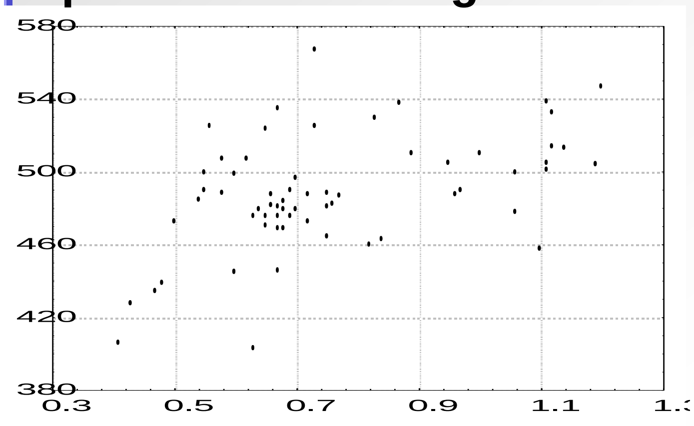

```
for i=1:length(z)-1
    x(i+1)=x(i)+(z(i+1)-x(i))/(i+1)
end
plot(t,x,t,z,'.r')
grid
```

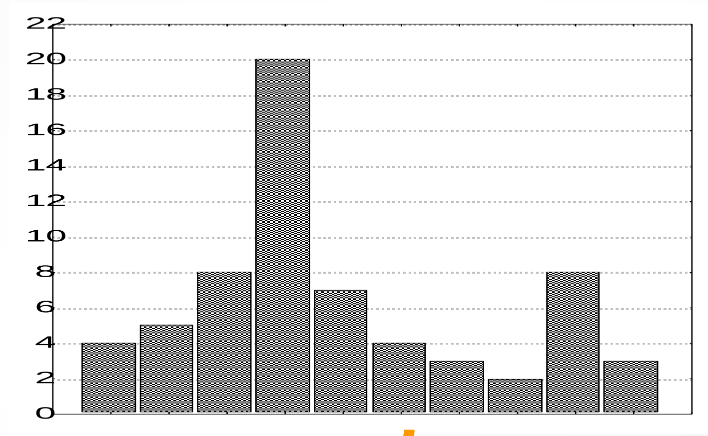
Consultoria
Treinamento
M & V

Marco Antonio Leonel Caetano

Por que usar a distribuição gaussina?

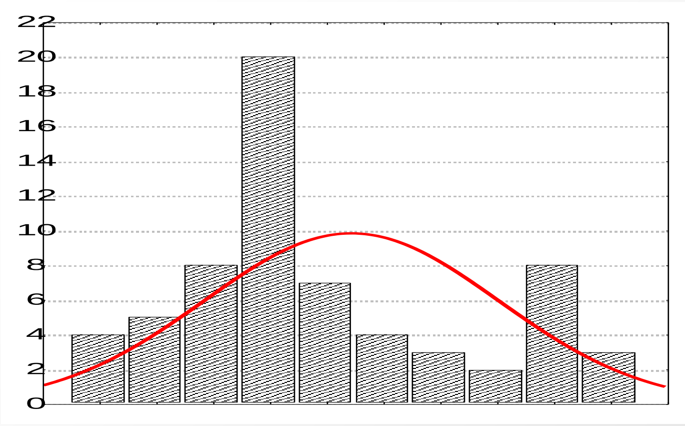
- Segundo o teorema do limite central, todas convergem para a normal para um número grande de pontos.





Teorema do Limite Central

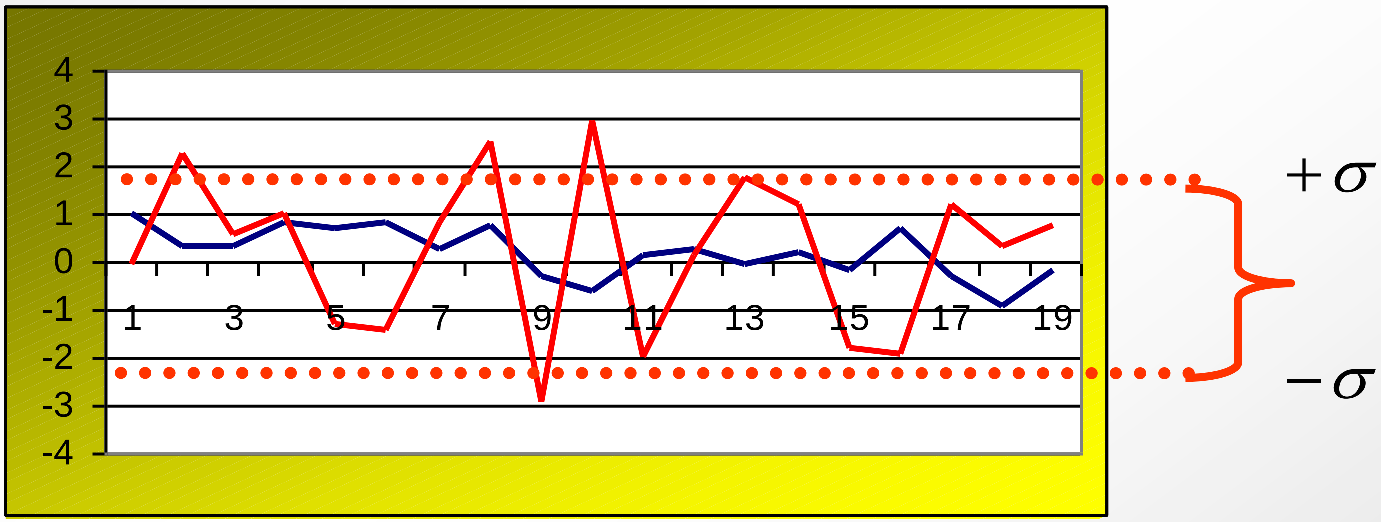
NORMALIZAÇÃO



Para uma única variável

- **Média:**
- **Variância:** σ^2

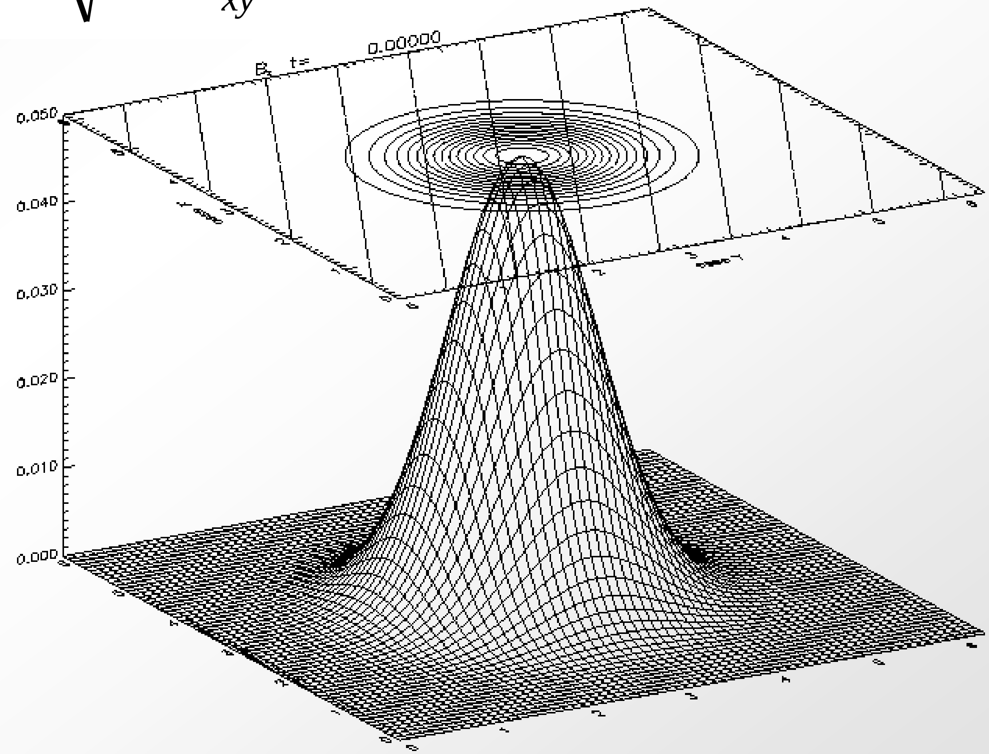
$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$



Marco Antonio Leonel Caetano

Para duas variáveis – Distribuição Espacial

$$f(x,y)=\frac{e^{-\frac{\left[(x-\bar{x})\quad(y-\bar{y})\right](\sigma_{xy}^{2})^{-1}\begin{bmatrix}(x-\bar{x})\\(y-\bar{y})\end{bmatrix}}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_{xy}^{2}}}$$



Média de x: $\bar{x}$

Média de y $\bar{y}$

Desvio Padrão de x: σ_x^2

Desvio padrão de y: σ_y^2

Covariância de x e y: σ_{xy}^2

Correlação de x e y: ρ

Mas a Covariância é uma matriz (P)

- **É necessário uma correção na fórmula pois,**

$$P = \sigma_{xy}^2 = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

A função gaussina corrigida para duas variáveis

$$\boxed{f(x,y) = \frac{e^{-\frac{\left[(x-\bar{x}) \quad (y-\bar{y})\right] P^{-1} \begin{bmatrix}(x-\bar{x}) \\ (y-\bar{y})\end{bmatrix}}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,|P|^{1/2}}}$$

onde | P | é o determinante da matriz de covariância

Problema

- E se as variáveis forem vetores de dados com sinais do tipo:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

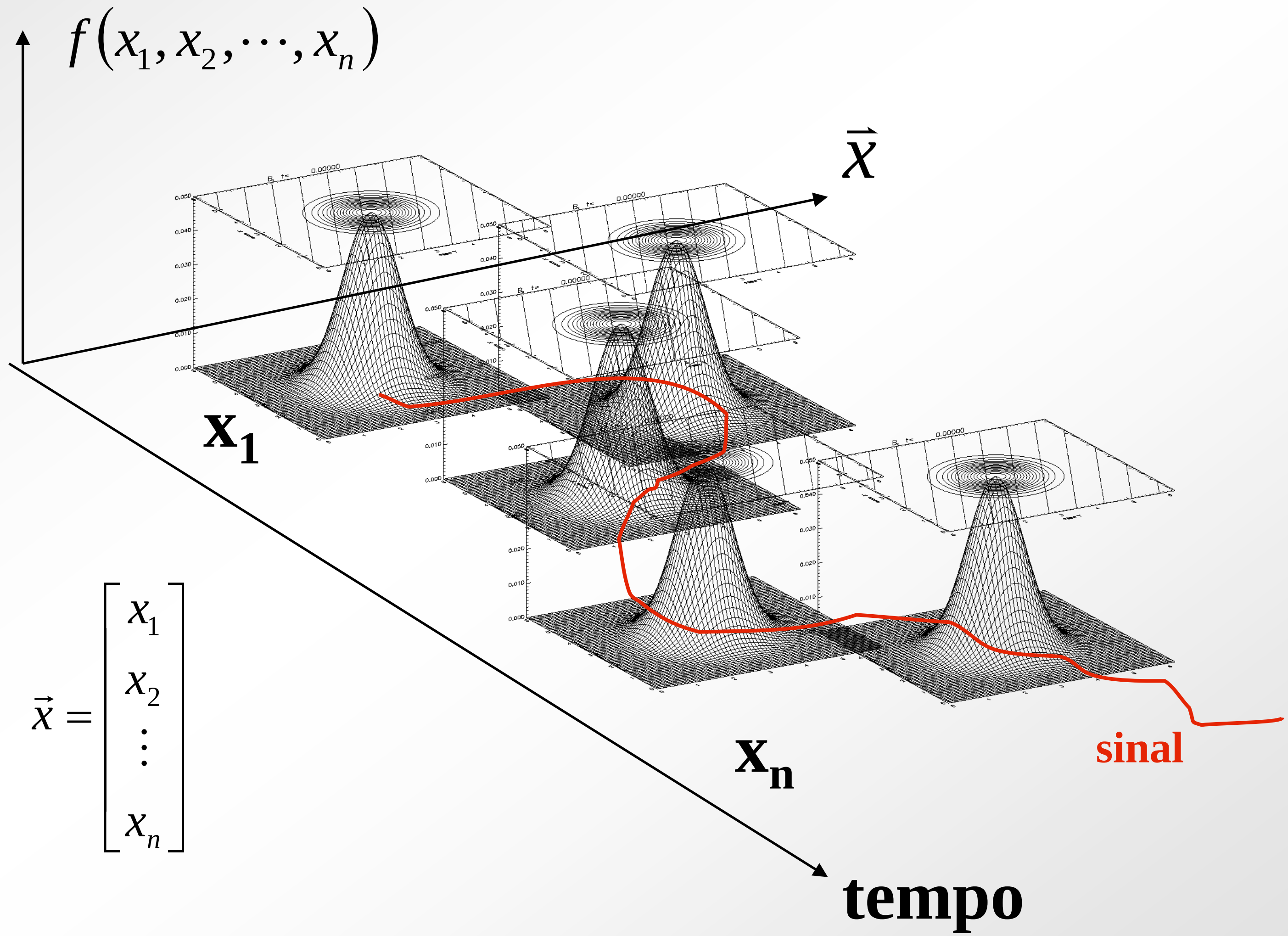
- A covariância seria:

$$P = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Impraticável! Todos os sinais teriam que serem armazenados em gigantescos bancos de dados para o calculo no fim.

Solução: Filtro *de Kalman*

Como o filtro de Kalman estima variáveis?

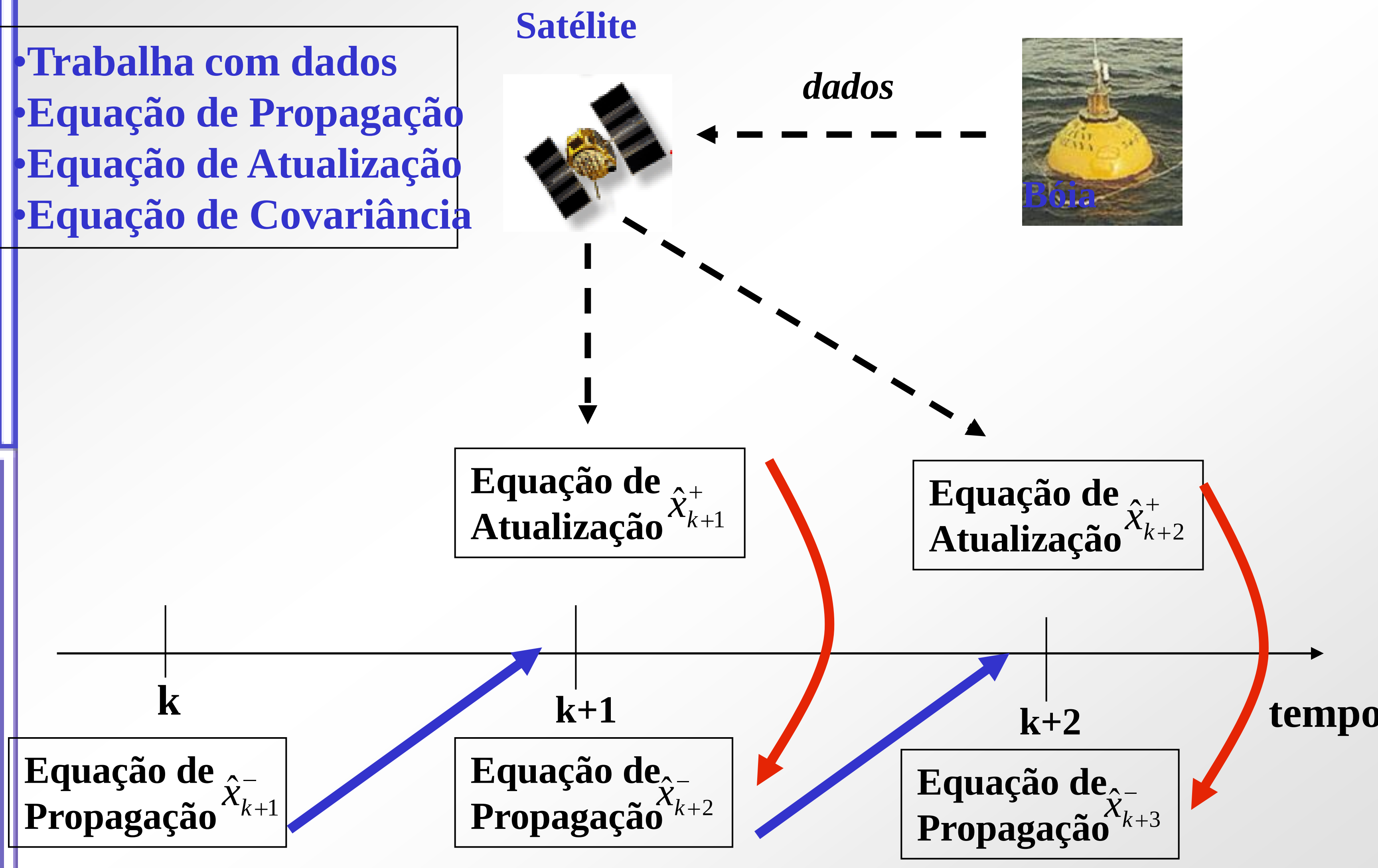


$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Consultoria
Treinamento
M & V
Marco Antonio Leonel Caetano

Algoritmo Esquemático

- Trabalha com dados
- Equação de Propagação
- Equação de Atualização
- Equação de Covariância



Algumas Definições

•**Variável de Estado (x)**

- Representa a variável de estudo do modelo matemático para a previsão dos dados futuros. Ex: temperatura, salinidade.

- O filtro linear usa modelo linear.

- O futuro é o presente com alguma correção e corrompido por ruído w_k.

$$x_{k+1} = Ax_k + C\omega_k$$

•**Variável de Medida (z)**

- Variável que simula a aquisição dos dados de um sensor.

- Para o filtro linear o modelo de medida é linear com ruído v_k do sensor.

$$z_k = Hx_k + \upsilon_k$$

•**Propagação (do estado ou da covariância)**

- É a simulação do que se espera de dados futuros baseados em k dados.

- Utiliza um modelo para a previsão.

•**Atualização (do estado ou da covariância)**

- É a correção da previsão usando os novos dados coletados pelo sensor.

Assumir

1. O estado é corrompido por perturbação do tipo ruído branco gaussinano com média zero e covariância Q (matriz para todos os valores propagados e atualizados).

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_{1x}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{2x}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{nx}^2 \end{pmatrix}$$

2. A medida do sensor é supostamente corrompida por ruído branco gaussiano com média zero e covariância R.

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_{1z}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{2z}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{nz}^2 \end{pmatrix}$$

Propagações

- **Propagação do Estado (à *priori*)**

Qual a melhor estimativa? A média! As barras representam a média.

$$\hat{x}_{k+1} = \overline{Ax_k + C\omega_k}$$

ω é o rúido branco do estado

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k}$$

- **Propagação da covariância do estado (à *priori*)**

$$P_{k+1} = \overline{(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^T}$$

$$P_{k+1} = \overline{[A(x_k - \bar{x}_k) + C\omega_k][A(x_k - \bar{x}_k) + C\omega_k]^T}$$

$$\Rightarrow \cdots\cdots$$

$$\boxed{P_{k+1} = AP_kA^T + CQC^T}$$

Atualizações

•Atualização do estado

– A melhor estimativa de x_k quando se tem medida z_k é aquela que minimiza o termo do expoente da distribuição gaussiana.

$$f(x,y)=\frac{e^{-\frac{\left[(x-\bar{x})\quad(y-\bar{y})\right]P^{-1}\begin{bmatrix}(x-\bar{x})\\(y-\bar{y})\end{bmatrix}}{2}}}{\sqrt{2\pi}\left|P\right|^{1/2}}$$

Isso é desejado!

Colocando a medida na distribuição gaussiana:

$$f(z|x)=\frac{e^{-\frac{(z-Hx)^T(z-Hx)}{2R}}}{\sqrt{(2\pi)R}}$$

Deseja-se minimizar

$$J=(z-Hx)^T R^{-1}(z-Hx)/2$$

Ou,

$$\frac{\partial J}{\partial X}=0$$

Isso leva à seguinte relação

$$H^T R^{-1}(z - Hx) = 0$$

Isolando o estado x para sua estimativa

$$\hat{x}^{posteriori} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} z$$

Usando a mesma idéia do mínimos quadrados recursivos para novas medidas chega-se a seguinte equação de atualização

$$\hat{x}_k^{\,posteriori} = \hat{x}_k^{\,priori} + \frac{P^{\,priori} H^T}{R}\left(z_k - H\hat{x}_k^{\,priori}\right)$$

•Atualização da covariância

A melhor covariância P quando se tem medida z_k *é aquela que zera o erro entre medida e variável:*

$$erro = \left(x - \hat{x}^{posterioi}\right)$$

Cuja medida estatística está na matriz de covariância (a barra significa média):

$$P = \overline{\left(x - \hat{x}^{posterioi}\right)\left(x - \hat{x}^{posterioi}\right)}$$

A melhor estimativa é conseguida substituindo a relação de atualização

$\hat{x}_k^{posteriori}$ *do estado na equação acima. A relação linear que surge é:*

$$\boxed{P^{posteriori} = P^{priori} - \frac{P^{priori}H^T}{HP^{priori}H^T + R}}$$

A matriz R é a inversa da matriz de covariância do erro do sensor de medida.

O Filtro de Kalman

Priori = (-)   *Posteriori = (+)*

Equação de Propagação:

$$\hat{x}_k^- = A.\hat{x}_{k-1}^+$$

propagação do estado

$$P_k^- = A.P_{k-1}^+.A^T + C.Q.C^T$$

propagação da covariância do estado

Equação de Atualização:

$$K_k = P_k^-.H^T.\left(H.P_k^-.H^T + R\right)^{-1}$$

ganho do filtro

$$P_k^+ = P_k^- - K_k.H.P_k^-$$

atualização da matriz de covariância do estado

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k.\left[z_k - H.\hat{x}_k^-\right]$$

atualização do estado

Quando o Filtro Falha

1. [Modelamento errado do estado]

   - Se a matriz de perturbação Q do estado for mal dimensionada em relação ao problema real o que acontece?

$$\hat{x}_{k+1}^{-} = \underbrace{A\hat{x}_k^{-}}_{\text{Modelo}} + AK_k \underbrace{\left(y_k - H\hat{x}_k^{-}\right)}_{\text{Medida}}$$

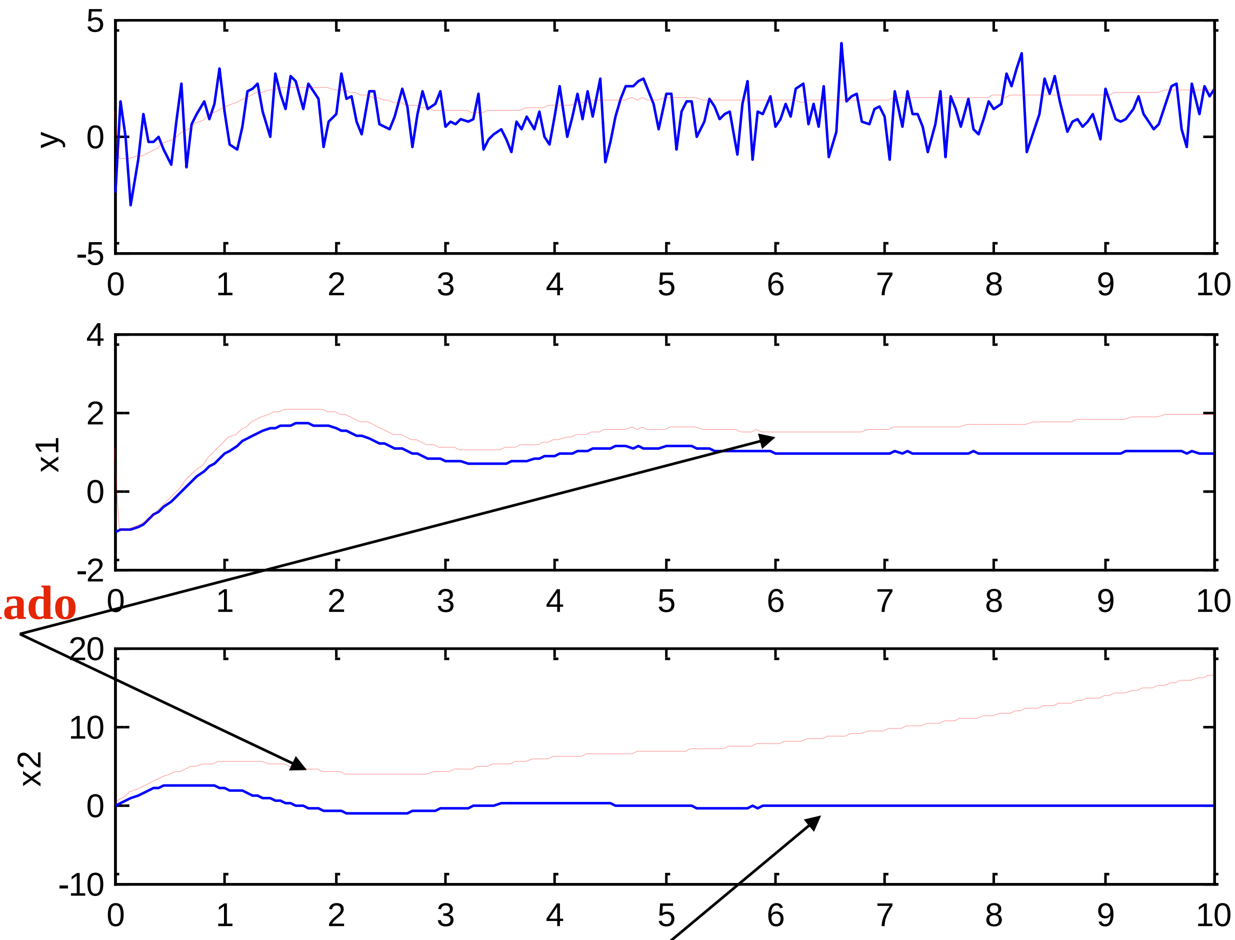
$$P_k^{-} = AP_{k-1}^{+}A^T + CQC^T$$

$$K_k = P_k^{-}H^T\left(HP_k^{-}H^T + R\right)^{-1}$$

$$\hat{x}_k^{+} = \hat{x}_k^{-} + K_k\left(y_k - H\hat{x}_k^{-}\right)$$

$$Q\downarrow \;\Rightarrow\; P_k^{-}\downarrow \;\Rightarrow\; K_k\downarrow \;\Rightarrow\; \hat{x}_k^{+} \approx \hat{x}_k^{-}$$

Resultado



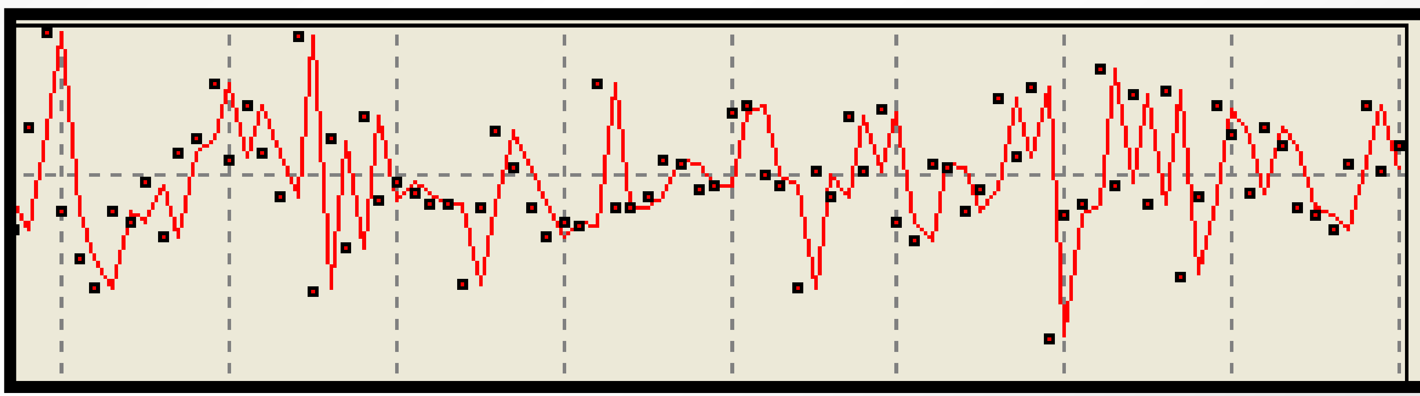
Sinal estimado Errado!

Sinal real

2. Se o ruído de medida é muito menor que a perturbação no estado, ou seja, se R<<<Q.

Significa que o sensor é totalmente confiável, pois:

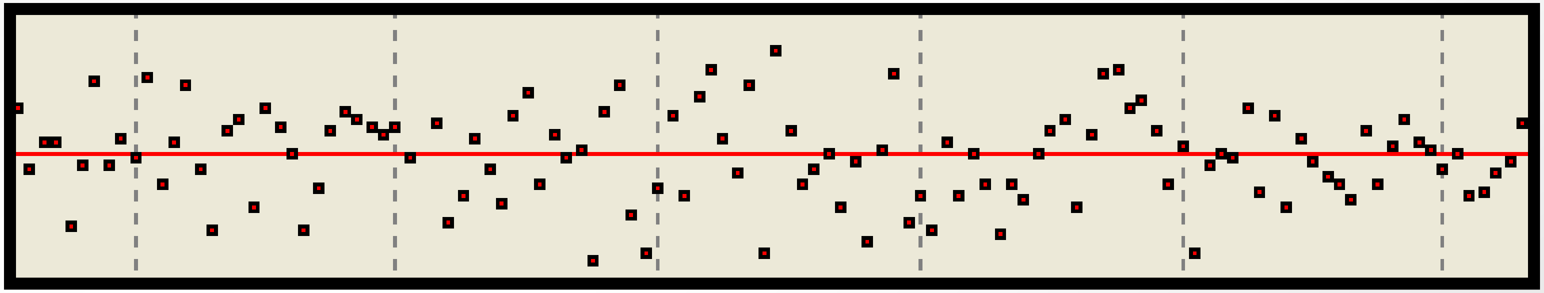
$R\downarrow \;\Rightarrow\; K\uparrow \;\Rightarrow$ **O filtro não filtra, acompanha as medidas de perto, pois são confiávies!**



3. Se o ruído de estado é muito menor que o ruído de medida, ou seja, se Q<<<R.

Significa que o sensor não é confiável, pois:

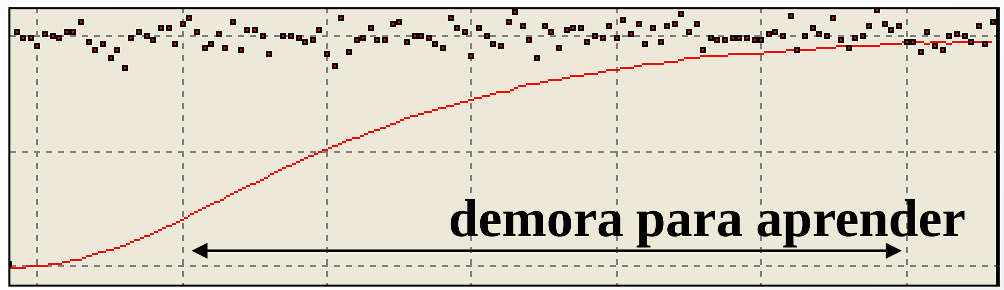
$Q\downarrow \;\Rightarrow\; K\downarrow \;\Rightarrow$ **O filtro só usa o modelo e filtra tudo. Abandona as Medidas, pois K→0 !**



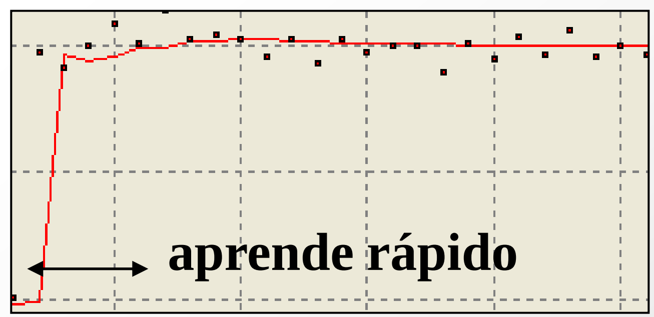
4. Se a matriz de covariância da perturbação do estado inicial P(0) for muito baixa.

Ela significa a memória do filtro. Se P(0) é baixa, o filtro não tem "memória" e demora a "enxergar" acontecimentos futuros.

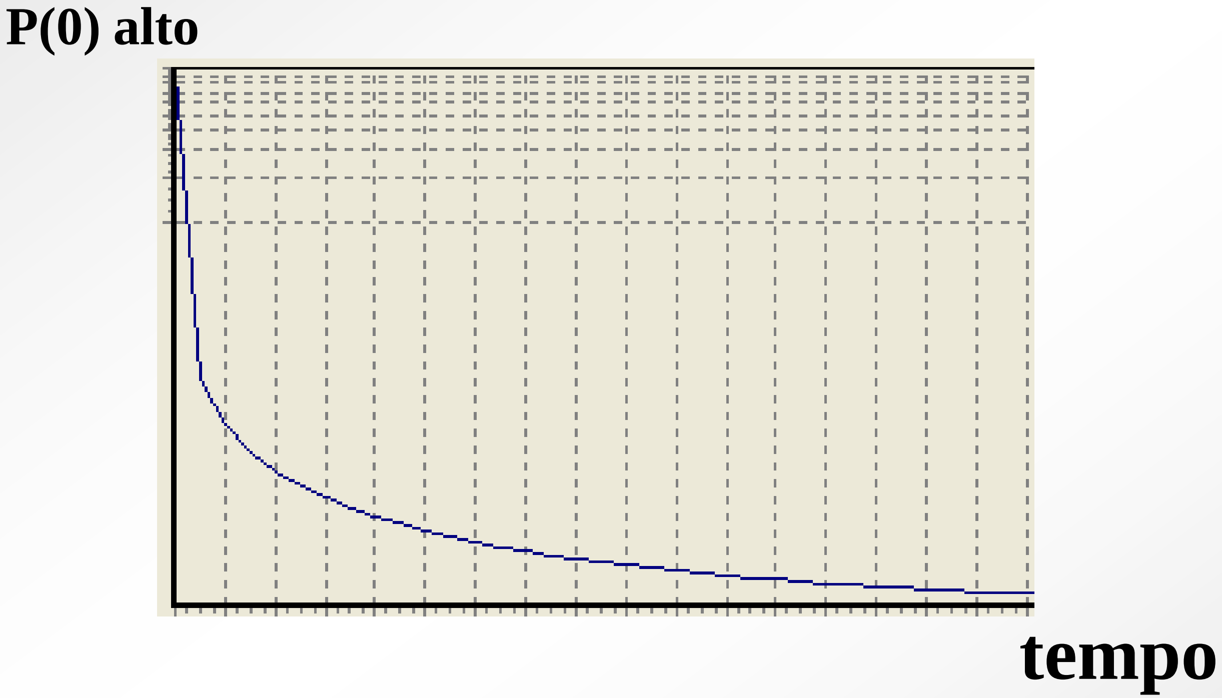
P(0) muito baixa



P(0) ideal



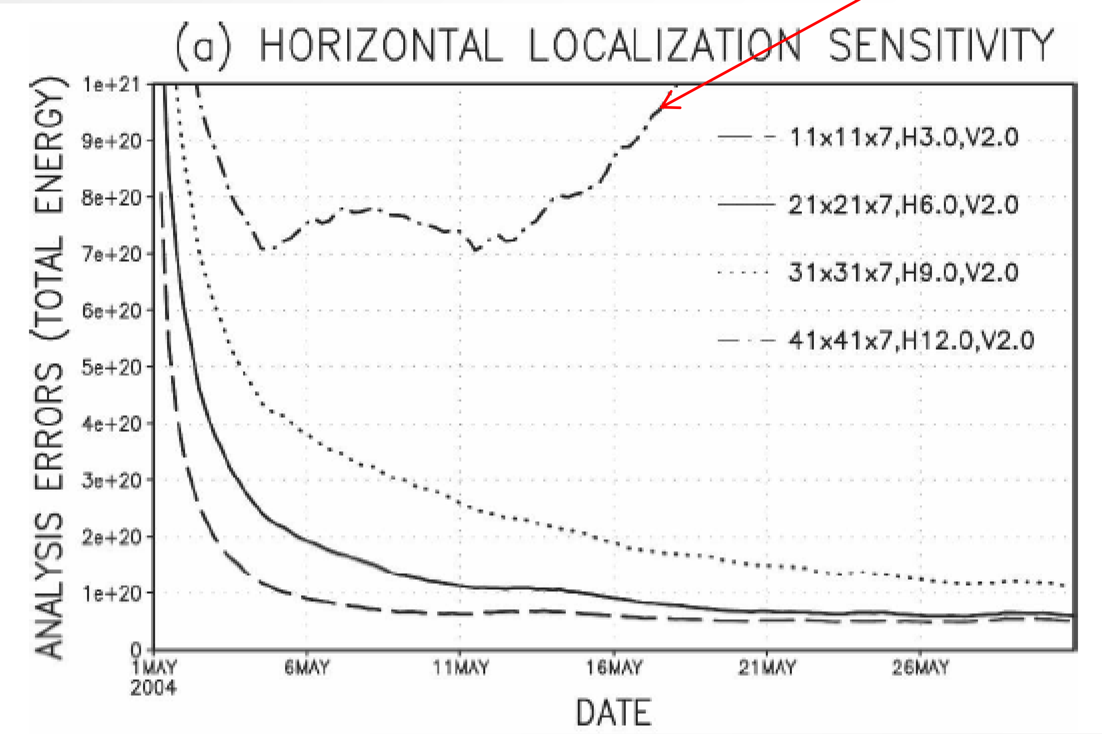
Característica ideal da covariância do estado P_k



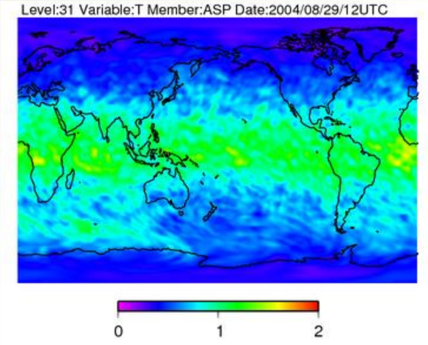
Covariânica do erro de localização horizontal

(Takemasa, Shozo, 2007, pag 3849)

ERRO NO MODELO



O problema da estimativa da temperatura SIMULAÇÃO

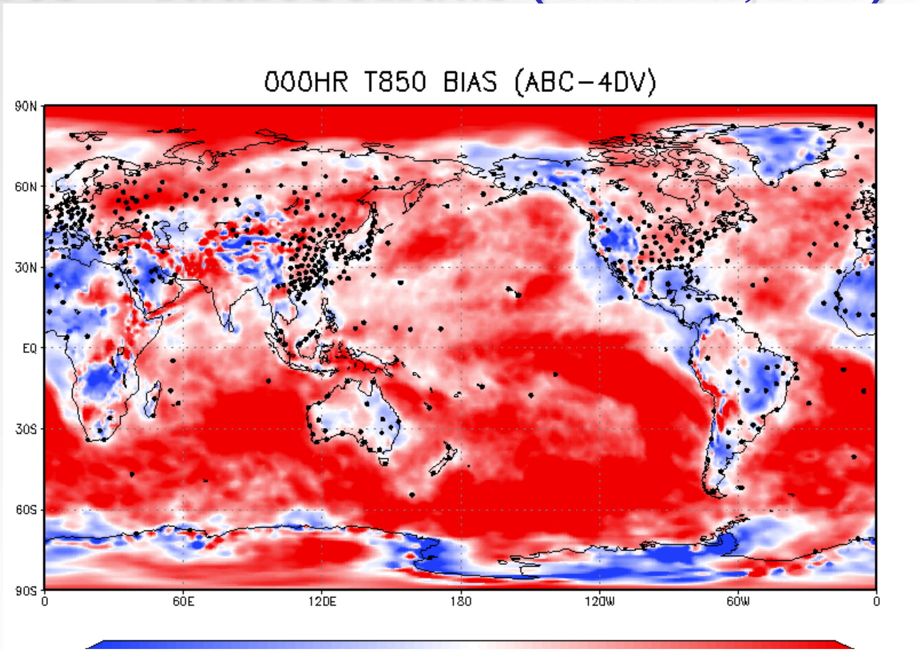


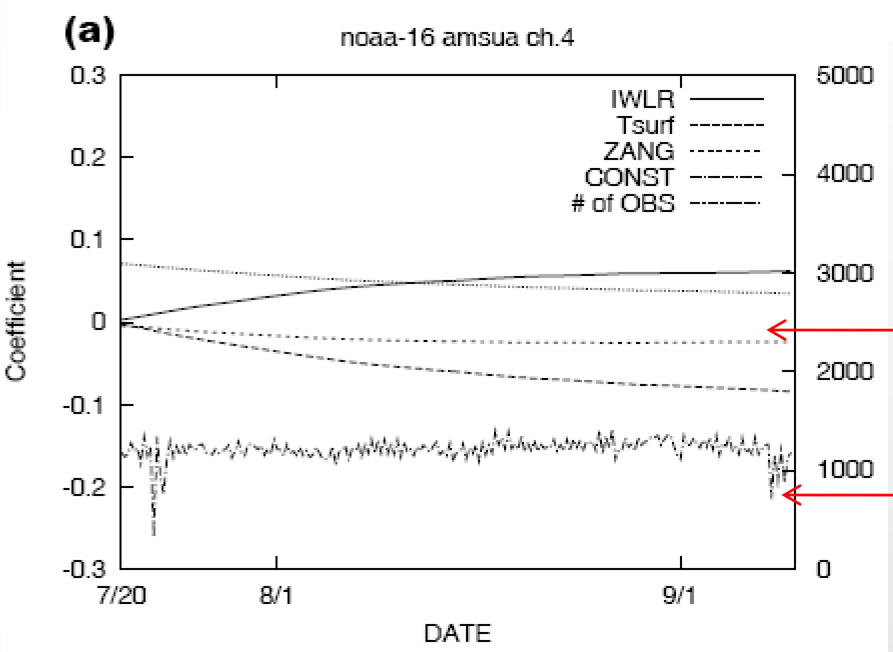
•Dados de temperaturas na localidade dos sensores (satélites, PCD,etc)
•Dados com ruído.

•O que se desejava?
- É possível estimar os dados em tempo real?
- É possível fazer uma previsão confiável com boa antecedência?

•Solução: Filtro de Kalman

Sensores – radiosondas (Takemasa, 2010)





Modelos

observado

<u>Modelo Utilizado</u>

$$x_{k+1} = Ax_k + C\omega_k$$

1. **Fez –se uma hipótese que A = 1.**
2. **Fez-se a suposição que C =1.**
3. **O valor de H =1 pois só tem um sensor de temperatura.**
4. **A perturbação aleatória no estado (temperatura) foi Q= 0,5ºC.**
5. **O ruído no sensor foi suposto de 10ºC, ou variância R=100.**
6. **A matriz de covariância inicial da perturbação do estado P(0)=40.**
7. **Finalmente, foi dito ao filtro que a temperatura inicial foi x(0)=0 ºC, para obrigar a ter uma alta imprecisão e fazer um aprendizado rápido.**
8. **O tempo final de simulação para aprendizado e filtragem foi de t = 100.**

Filtro

Equação de Propagação:

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1}^+$$

x(0)=0

$$P_k^- = P_{k-1}^+ + 0,5$$

P(0)=40

Equação de Atualização:

$$K_k = \frac{P_k^-}{P_k^- + 100}$$

$$P_k^+ = \left(1 - K_k\right) P_k^-$$

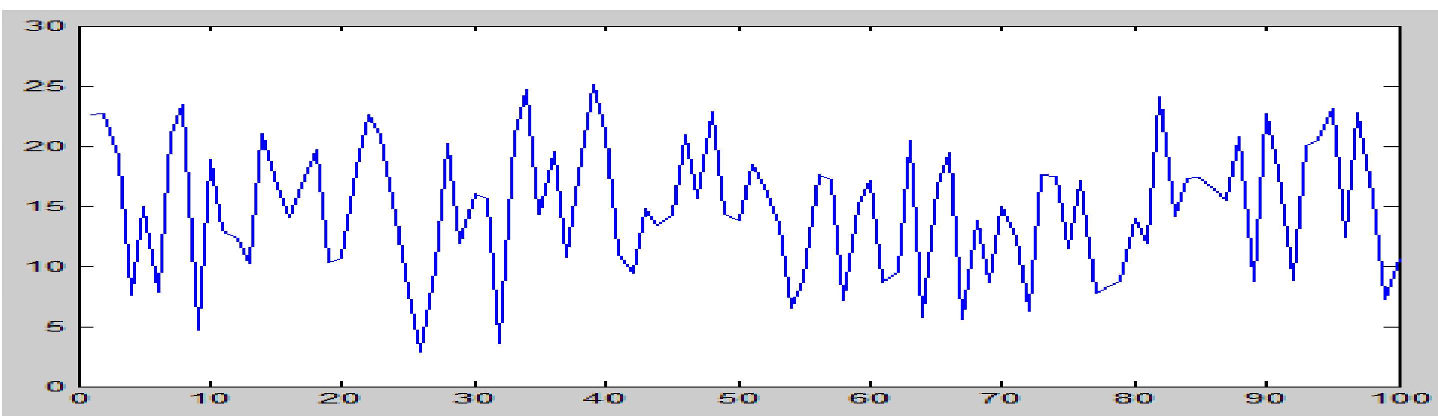
$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k . \left[z_k - \hat{x}_k^- \right]$$

Simulando os dados do sensor

$$real(i) = 16 - 1{,}23\cos\left(\frac{\pi i}{350}\right) - 0{,}86sen\left(\frac{\pi i}{350}\right) + 5\omega$$

onde w é ruído branco com média zero e desvio padrão 1

```
clear all
%====================== Lendo os dados reais ========================
for i=1:100
    real(i)=16-1.23*cos(pi*i/350)-0.86*sin(pi*i/350)+5*randn;
end

z=real;
```



Inicializando o filtro

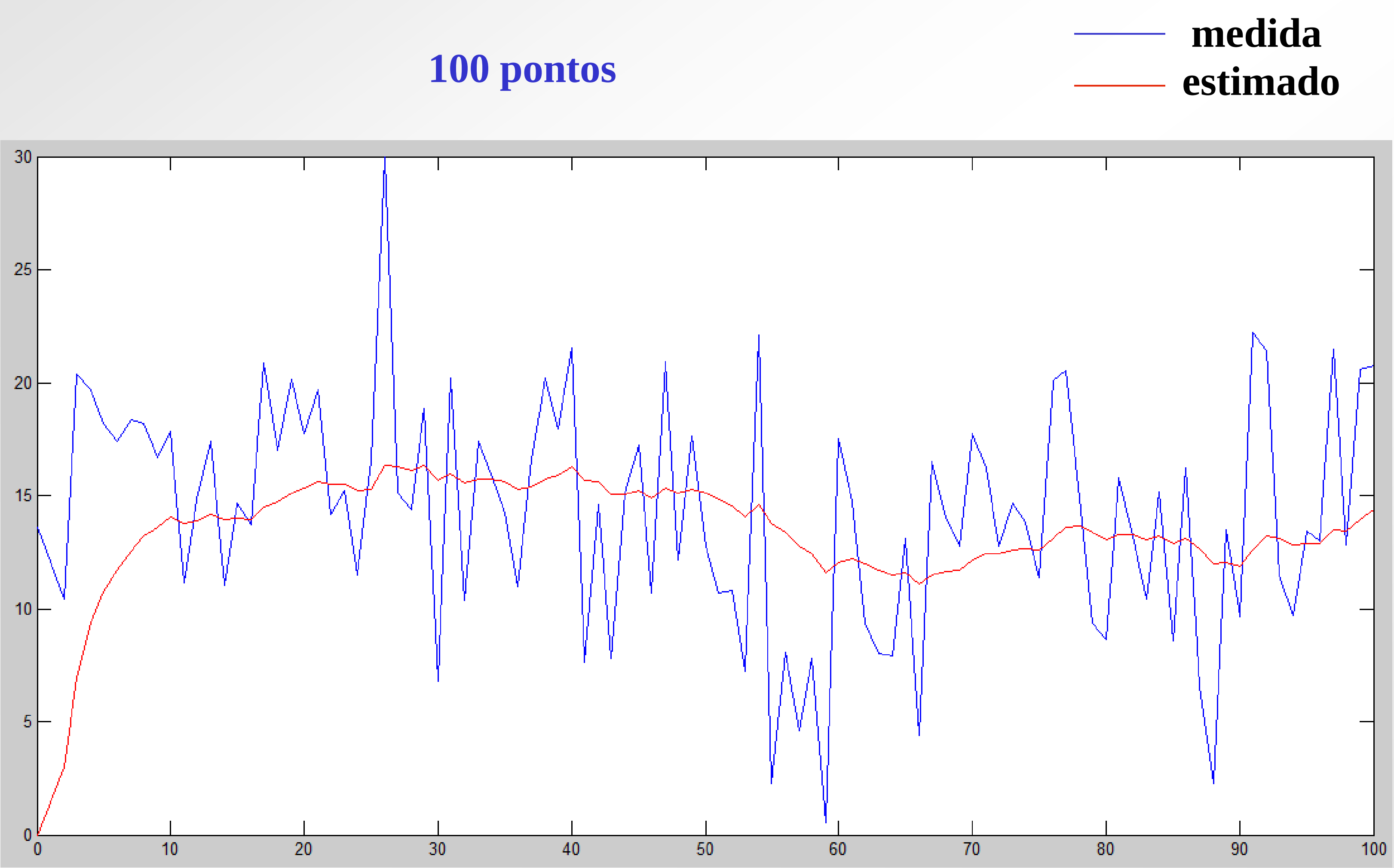
```
%=========================Inicializaçao do Filtro de Kalman ============
xa(1)=0;
sigma1=0.5;
 a=1;
 c=1;
 H=1;
 %.....................matriz de covariancia do estado
 pa(1)=40;
 %.................... covariancia do ruido do estado
 sigma1=0.5;
 %.................... covariancia do ruido de medida do sensor
 R=100;
 %.................... tempo de filtragem do FK
tempsimul=100;
```

Marco Antonio Leonel Caetano

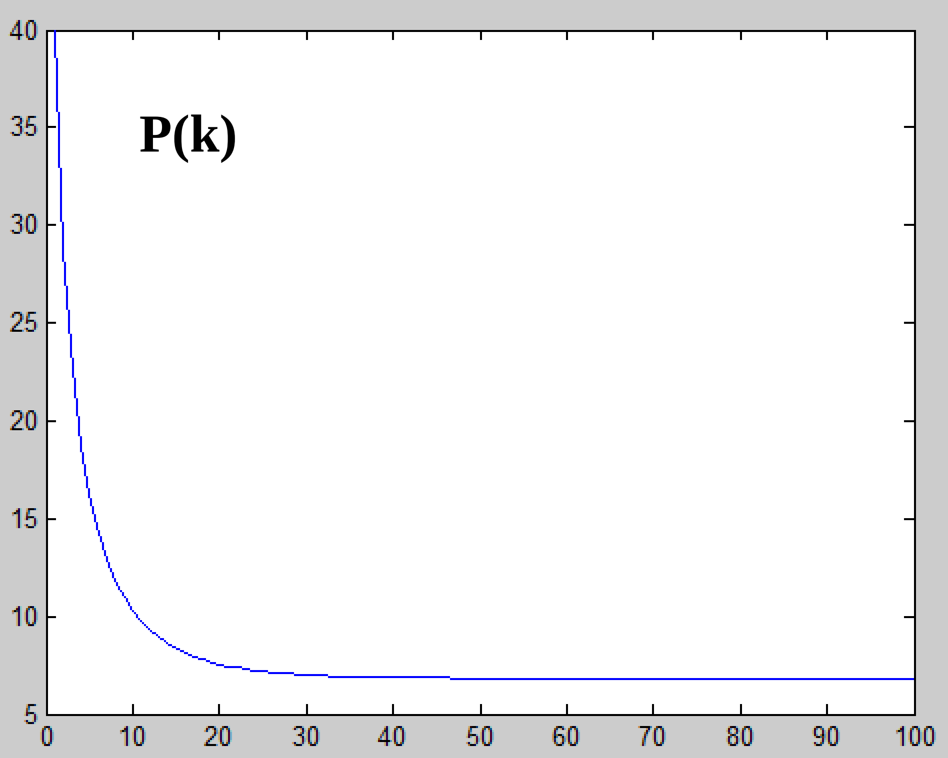
A caixa do Filtro de Kalman

```
  %////////////////////  FILTRO DE KALMAN //////////////////////////
for  i=2:tempsimul
t(i)=i;

%{PROPAGAÇÃO}
%{=====================================================}
     xp(i)=a*xa(i-1);
     p(i)=a*pa(i-1)*a+c*sigma1*c;
%{=====================================================}
% {ATUALIZAÇÃO}

     KK(i)=p(i)*H/(H*p(i)*H+R);
     pa(i)=p(i)-KK(i)*H*p(i);
     xa(i)=xp(i)+KK(i)*(z(i)-H*xp(i));
 end


  %======================= GRAFICOS ============================
   plot(t,z(1:tempsimul),'-b',t,xa,'-r')
```

100 pontos



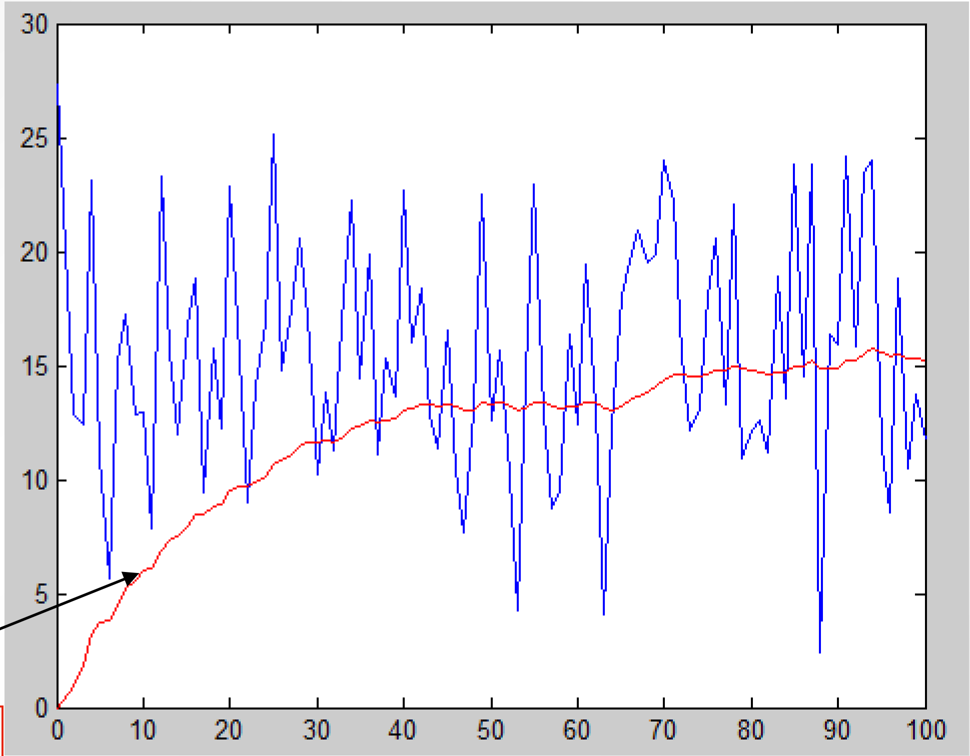
A Covariância do estado (temperatura)



O filtro de Kalman “aprendeu” com 20 dados!!

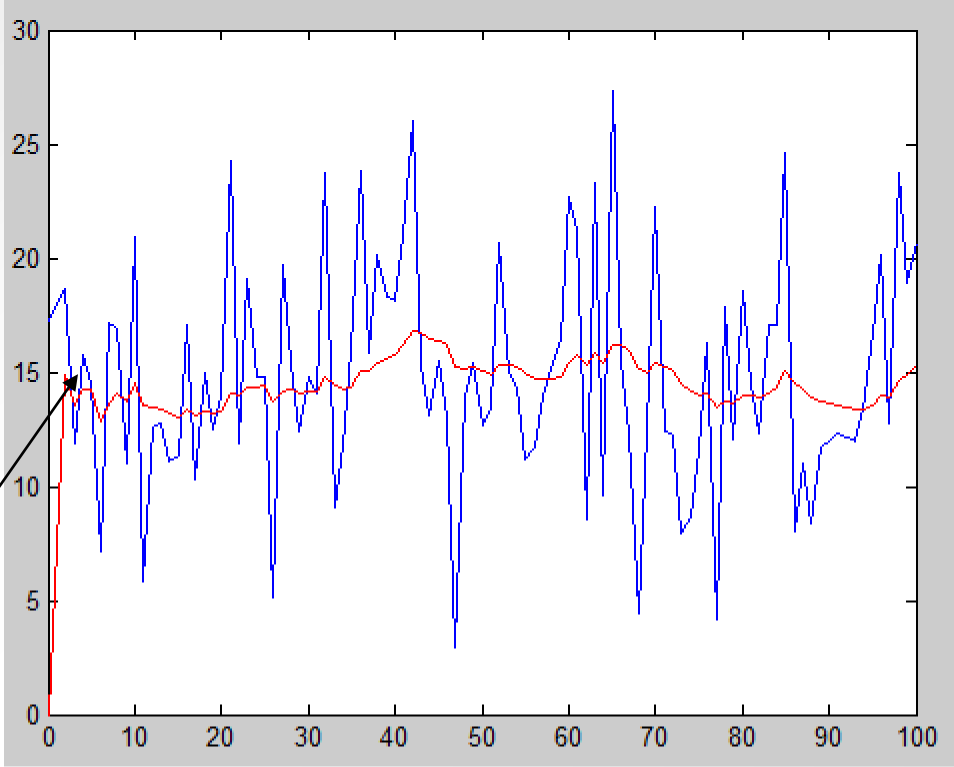
Cenário 2: Sensor com mais ruído – Sinal mais filtrado

erro = 22,36ºC
R=erro^2 = 500



Valoriza o modelo pois medidas menos Confiáveis !

Cenário 3: Covariância com maior incerteza

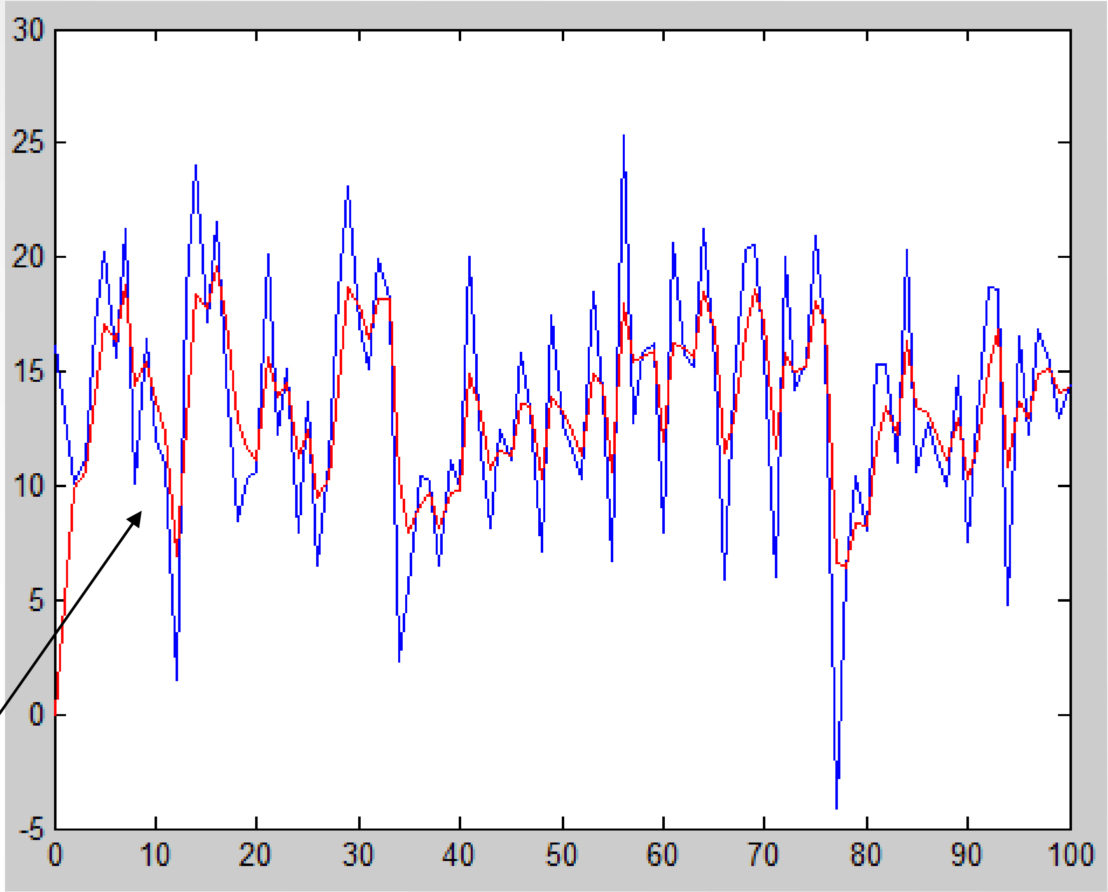


P(0) = 400
R = 100

Ajusta mais rápido às medidas. Elas tem mais valor do que o modelo!

Cenário 4: Ruído de sensor super-baixo

P(0) = 40
R = 1



Esquece o modelo pois a melhor estimativa é a medida do sensor

Consultoria
Treinamento

M & V

Marco Antonio Leonel Caetano

BIBLIOGRAFIA