



IBMEC SÃO PAULO
Faculdade de Economia e Administração

Análise de investimentos: abordagem dinâmica

Rogério Chiari Trevisan

São Paulo
Novembro de 2009

Monografia Final

Análise de investimentos: abordagem dinâmica

Monografia Final apresentada ao curso de Ciências Econômicas, como requisito final da disciplina de Monografia II do Ibmec São Paulo.

Orientador:

Prof. Dr. Marco Antônio Leonel Caetano – Ibmec São Paulo

Resumo

Este trabalho utiliza o Filtro de Kalman para identificação do sistema Presa-Predador aplicado a índices de ações do Brasil (IBOV), Estados Unidos (DJI), Inglaterra (FTSE) e Japão (NIK). Foi possível identificar esse sistema, pois o comportamento dos índices em determinados momentos apresentava caracterização semelhante ao sistema Presa-Predador quando ambos eram observados em Planos de Fase. Além disso, foi apresentada teoria sobre sistemas dinâmicos, linearização de sistemas não lineares, discretização de sistemas contínuos pelo método de Euler e Runge-Kutta além das equações e funcionamento do Filtro de Kalman.

Palavras-chave: Filtro de Kalman, Identificação de Sistemas, Sistemas de Equações de Lotka e Volterra, Índices de Ações.

São Paulo
Novembro de 2009

Sumário

1. Introdução.....	1
2. Material e Métodos.....	4
3. Identificação de Sistemas	16
4. Resultados e Simulações.....	25
5. Conclusão	54
6. Referências	56
7. Anexos.....	58

Índice de Figuras

Figura 1.....	6
Figura 2.....	6
Figura 3.....	7
Figura 4.....	9
Figura 5.....	10
Figura 6.....	13
Figura 7.....	14
Figura 8.....	19
Figura 9.....	21
Figura 10.....	22
Figura 11.....	23
Figura 12.....	24
Figura 13.....	26
Figura 14.....	27
Figura 15.....	28
Figura 16.....	31
Figura 17.....	32
Figura 18.....	33
Figura 19.....	36
Figura 20.....	37
Figura 21.....	38
Figura 22.....	38
Figura 23.....	39

Figura 24.....	40
Figura 25.....	41
Figura 26.....	41
Figura 27.....	42
Figura 28.....	42
Figura 29.....	43
Figura 30.....	43
Figura 31.....	44
Figura 32.....	44
Figura 33.....	45
Figura 34.....	46
Figura 35.....	47
Figura 36.....	48
Figura 37.....	49
Figura 38.....	50
Figura 39.....	51
Figura 40.....	52
Figura 41.....	53

1. Introdução

O *security selection*, ou seja, a busca por oportunidades de investimentos dentro de uma classe de ativos é tarefa de extrema importância pois deverá buscar ativos que não estão corretamente apreçados a fim de que seja possível obter ganhos. Esse procedimento é basicamente dividido em dois importantes tipos de análises: a análise fundamentalista e a análise técnica.

A primeira é relacionada à análise dos fundamentos da empresa, ou seja, baseada em indicadores e estatísticas contábeis para verificar o desempenho e solvência de uma empresa. ROSTAGNO *et al* (2008) encontrou características similares entre ações de empresas em carteiras vencedoras, ou seja, com retorno acima daquele do mercado, bem como características similares entre ações de carteiras perdedoras. As ações de carteiras perdedoras apresentaram baixo ROA (*Return on Assets*, definido pela razão entre lucro líquido e ativo total, é uma medida para avaliar as operações da empresa) e ROE (*Return on Equity*, definido pela razão entre lucro líquido e patrimônio líquido, é uma medida para avaliar a rentabilidade do acionista) e razões altas de preço-lucro. Já as vencedoras, demonstraram possibilidade de maiores ganhos sobre o patrimônio líquido e retornos passados baixos.

FAMA (1969) realizou testes empíricos (além de apresentar o arcabouço teórico) para a Eficiência de Mercado em suas três formas: forma fraca, meio forte e forte. Foram encontradas evidências que suportam tais hipóteses e ao mesmo tempo, em quantidade baixa, evidências de contradição das hipóteses.

O segundo tipo de análise, a análise técnica, utiliza a interpretação gráfica de preços de modo a identificar padrões de comportamento que se repetem ao longo do tempo. BROCK *et al* (1992) demonstrou que foi possível obter ganhos anormais (e acima daqueles previstos por modelos acadêmicos como Passeio Aleatório, AR(1), GARCH-M e EGARCH) a partir da implementação da análise técnica, a qual utilizava

médias móveis e suporte e resistência, em uma série do Índice Dow Jones Industrial Average de 1897 até 1986.

MINARDI (2004) verificou se as séries históricas de preços de ações possuem algum tipo de poder de previsão para retornos futuros, o que no caso, pode-se dizer que foi testada a Hipótese de Eficiência de Mercado na forma fraca. Os resultados mostraram que é possível construir carteiras com retornos significativamente superiores ao retorno de mercado, bem como carteiras com retorno significativamente inferiores aos do mercado.

DAMODARAN (2002) apresenta técnicas de avaliação do preço justo para virtualmente qualquer tipo de ativo. As técnicas de análise utilizadas fazem parte da teoria de finanças e englobam desde o Modelo de Gordon até a teoria de Opções Reais, fundada pelo trabalho de BLACK e SHOLES (1973).

Porém, este trabalho irá explorar a análise de investimentos a partir de uma abordagem mais direcionada ao ponto de vista da matemática, a análise da dinâmica dos preços utilizando a teoria de sistemas dinâmicos e análise de sinais para identificação de sistemas. Através do uso de equações diferenciais ordinárias não lineares para a modelagem do comportamento de uma série de preços ao longo do tempo, pretende-se obter uma ferramenta para investimento no médio prazo.

Para isso, será utilizado o sistema de equações não lineares Presa-Predador apresentado por Boyce e DiPrima (2001) utilizando os dados dos índices Dow Jones Industrial Average e Ibovespa.

CAETANO *et al* (2007) utilizou um sistema de EDO's não lineares para a construção de uma estratégia de investimento baseado no movimento relativo de duas ações do mercado brasileiro, as quais apresentavam movimentação peculiar e que foram modeladas pelas equações de Lotka e Volterra conhecidas como Presa-Predador.

A abordagem em finanças através de métodos quantitativos envolvendo modelagem matemática tem muitos representantes. MANDELBROT *et al* (2004) trata da abordagem através da geometria fractal, desenvolvida por ele, para a modelagem dos mercados. SORNETTE *et al* (2001) em seu trabalho, diz que é possível identificar grandes *crashes* no mercado através da identificação de um padrão log-periódico nos preços e que isso ocorre com grande antecipação ao *crash*. Na modelagem ele utiliza um modelo que era anteriormente utilizado para a previsão de movimentações sísmicas fora da média.

Já ROSSER (1999), explica ao leitor como a cibernética, teoria da catástrofe, teoria do caos e complexidade são utilizadas na área da economia. O trabalho expõe os argumentos a favor e contra o uso desses arcabouços tanto na economia quanto em qualquer outra área. Essas teorias têm em comum a suposição de que todos os sistemas são ligados, então qualquer perturbação em um sistema pode impactar no outro. Além disso, esse ponto de vista também trabalha na modelagem de múltiplos pontos de equilíbrio/ descontinuidade.

No contexto da análise de séries temporais, HARVEY (1989) utiliza o filtro de Kalman para o suavizamento de dados e sua previsão. O Filtro de Kalman é um estimador ótimo para parâmetros de modelos em representação em espaço de estado pois trabalha minimizando a matriz de covariância do erro de previsão. Trata-se de um método recursivo com aplicações em diversas áreas das ciências exatas, principalmente na engenharia.

GRACIA (2004) propõe um modelo para ciclos econômicos utilizando o sistema de equações não lineares de Presa-Predador. Os resultados mostraram que o modelo é compatível com a hipótese de eficiência de mercado e que a abordagem deveria ser utilizada em detrimento da teoria do *Real Business Cycle*.

Este trabalho está dividido em sete seções, incluindo esta. A seção dois apresenta a metodologia utilizada no trabalho enquanto que a seção 3 exibe um arcabouço mais detalhado sobre identificação de sistemas. A seção 4 apresenta os resultados e simulações utilizando dados reais de índices de ações. A seção 5 contém as conclusões e sugestões de melhoria enquanto que a seção 6 apresenta as referências utilizadas para a construção deste trabalho e a seção 7 contém os algoritmos em *Matlab* utilizados nas simulações.

2. Material e Métodos

2.1 As Equações de Lotka-Volterra

O modelo de Presa-Predador, originalmente proposto por Lotka e Volterra em 1925 e 1926, respectivamente, para a dinâmica de duas populações, considerado por Boyce e DiPrima (2001), tem a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + \gamma x)\end{aligned}\tag{1}$$

O sistema representa as populações de presa e predador onde as variáveis x e y representam cada uma dessas duas populações respectivamente. Os outros termos que aparecem em (1) são constantes e representam: a - taxa de crescimento da população de presas; c - taxa de crescimento (no caso, como c é uma constante positiva, aqui taxa de crescimento será a taxa de mortalidade) da população de predadores; α e γ - são medidas de interação entre as duas populações quando elas se encontram.

Se for observada a maneira como o modelo é identificado, percebe-se que dependendo do valor dos parâmetros as populações de presas ou de predadores podem terminar em número maior ou menor.

Outras considerações merecem atenção (como em Boyce e DiPrima (2001)): fazendo $y=0$ a população de presas cresce a uma taxa proporcional à população atual, pois estas não serão caçadas; de maneira contrária, quando $x=0$, a população de predadores diminui, pois não existe alimento.

Na literatura econômica, SHONE (2002) utiliza o sistema de equações diferenciais não lineares proposto acima (Presa-Predador) para um modelo de competição entre dois agentes (sem considerar que a população de um deles se sobreponha a outra tendo em vista valores iniciais muito distantes). Esses agentes competem por bens distintos e quando a população de um deles fica muito grande, ela logo é equilibrada, tendo em vista maiores oportunidades de captura para a segunda população.

Além do modelo sem sobreposição populacional, SHONE (2002) simula um modelo com sobreposição populacional, o qual é exibido abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (a - by - ux)x \\ \frac{dy}{dt} &= (c - dx - vy)y\end{aligned}\tag{2}$$

Os termos $-ux^2$ e $-vy^2$ modelam a sobreposição populacional. Os outros termos possuem características idênticas aos anteriormente citados.

A fim de ilustrar geometricamente como se comporta esse sistema de equações diferenciais não lineares, valores para os parâmetros (constantes) citados anteriormente para, respectivamente, os modelos sem e com sobreposição populacional são mostrados abaixo (de acordo com SHONE (2002)). Além dos valores dos parâmetros, é mostrado também o respectivo gráfico contendo o plano de fase para o sistema de equações.

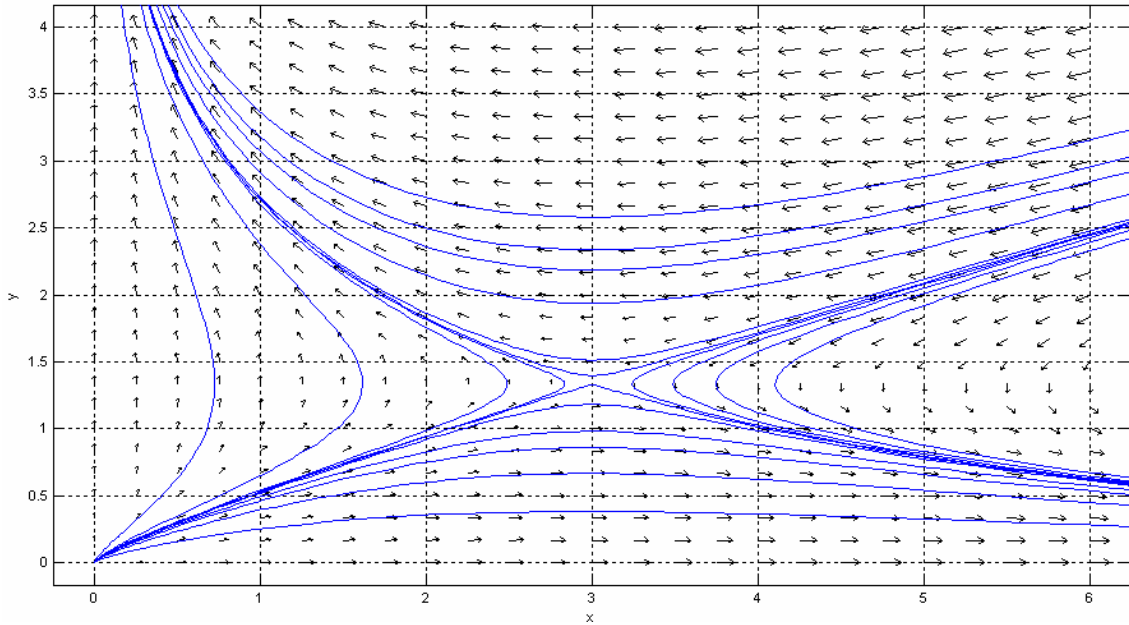


Figura-1 Plano de Fase para (1) com $a=4$; $c=-3$; $\alpha=3$ e $\gamma=1$

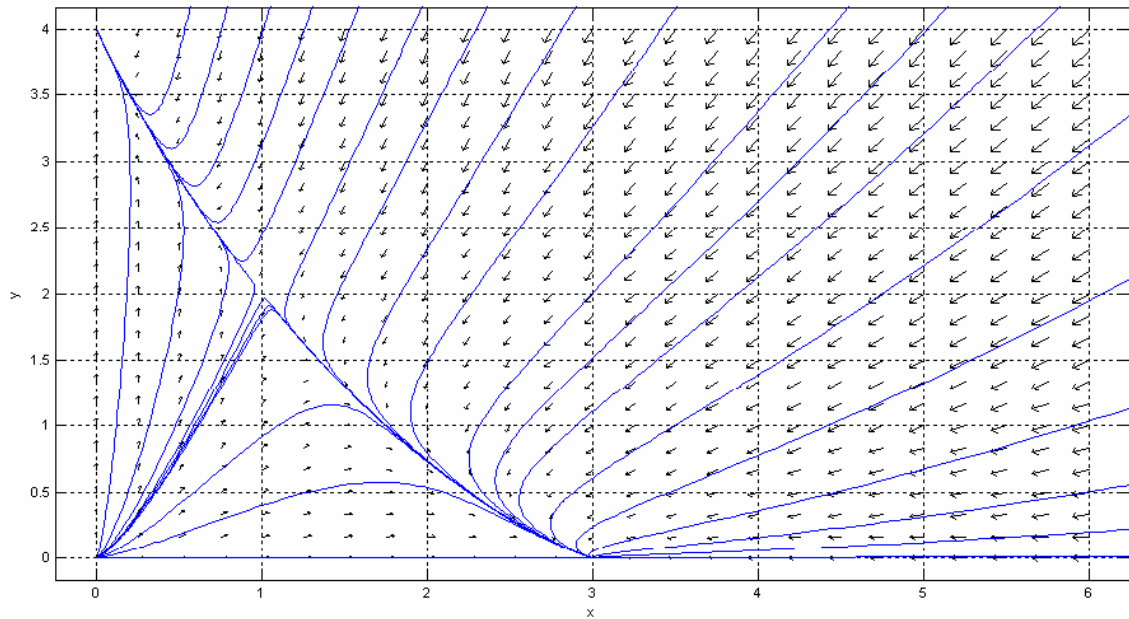


Figura-2 Plano de Fase para (2) com $a=3$, $b=1$, $u=1$, $c=4$, $d=2$, $v=1$

Nos exemplos acima apresentados na Figura 1 e Figura 2, as estimativas dos valores dos parâmetros foram dadas. Porém, esse não será o nosso caso. Esses parâmetros são fatores não observáveis, pois tratam-se de características da população.

Neste trabalho, as duas populações são os valores absolutos dos índices de ações das bolsas de Nova York e de São Paulo, respectivamente New York Stock Exchange e BMF Bovespa. Como se trata de um sistema dinâmico, o qual continuamente é alimentado por informações, tem-se o mesmo problema de parâmetros não observáveis.

Os preços observados a cada dia para os índices, servem como base para a precificação de ações pelo mercado. Porém, o método de apreçamento não é livre de vies e ruído (devido a inúmeros fatores tais como assimetria e velocidade da informação, agentes que não utilizam toda informação disponível, choques exógenos, entre outros), portanto, os dados sobre preços que observamos não é a real representação daquilo que está acontecendo. A Figura 3 mostra um gráfico com uma das séries de dados utilizadas neste trabalho, o índice Ibovespa no eixo x e o índice DJIA no eixo y. Os dados são de 2 de fevereiro de 2004 até 10 de junho de 2009 e foram obtidos através do Terminal *Bloomberg*®. É possível perceber que o sistema não é explosivo, ou seja, os dados apresentados não são divergentes.

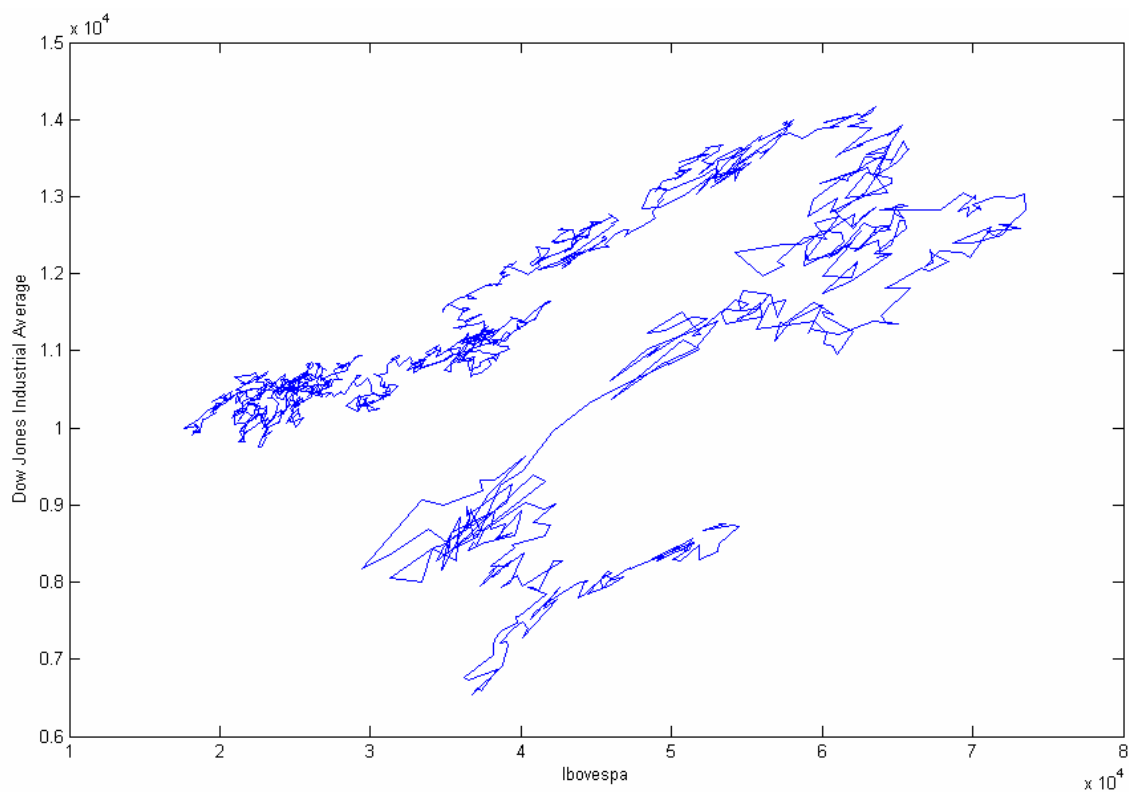


Figura-3 Ibovespa e DJIA

Para contornar este empecilho (a estimação dos parâmetros do modelo Presa-Predador), o presente trabalho utilizará para a estimação dos parâmetros de (1) a técnica conhecida como Filtro de Kalman.

2.2 O Filtro de Kalman

Conforme os trabalhos de HARVEY (1989), GELB (1974) e MAYBECK (1979), este trabalho utilizará o Filtro de Kalman para a estimação dos parâmetros das equações envolvidas no sistema.

O Filtro de Kalman é um algoritmo recursivo baseado na teoria de análise de sinais, o qual minimiza o erro médio quadrático de forma recursiva, ou seja, considera toda informação até o momento t , para a estimação ótima do vetor de estado (vetor contendo as variáveis explicadas do modelo). Para melhor entendimento do que foi exposto, segue uma rápida explicação sobre a representação de modelos na forma de espaço de estado.

Quando um fenômeno acontece, ele não é observado diretamente. Por exemplo, quando se observa um objeto, o que é visto não é o objeto, trata-se da luz refletida por ele. A luz é o meio pelo qual percebemos o efeito de enxergar o objeto.

A partir desta linha de raciocínio pode-se querer, então, quebrar o que foi descrito em duas partes: a primeira contempla o objeto (o estado), e a segunda a luz refletida pelo objeto (a medida, ou sensor). O sensor é responsável por tornar o estado inteligível. Pode ser considerado também que tanto o estado quanto o sensor estão sujeitos a ruídos: diferenças de temperatura e exposição à luz alteram o objeto (ruído no estado) e diferenças no meio pelo qual a luz se propaga e como ela é entendida pelo cérebro para formar a imagem do objeto também geram distorções (ruído no sensor).

Resumindo, tem-se o fenômeno dividido em dois componentes, um não observado (estado) e um observado (sensor).

O Filtro de Kalman utiliza a idéia apresentada para fazer uma estimação ótima do vetor de estado. Diz-se que as estimativas são ótimas pois a técnica trabalha minimizando os termos da variância da matriz de covariância do erro um passo a frente em relação ao passo anterior.

A aplicação do Filtro de Kalman é muito interessante quando se trabalha com dados em tempo real, ou seja, quando existe nova informação chegando a todo instante t . Isso se faz pois a todo instante pode ser possível o ajuste das estimativas dos parâmetros. Então é óbvio que tal técnica não requer que os parâmetros sejam fixos, eles podem variar ao longo do tempo, e mais, podem ser estocásticos.

A Figura 4, adaptada de MAYBECK (1979) ilustra o funcionamento do Filtro de Kalman.

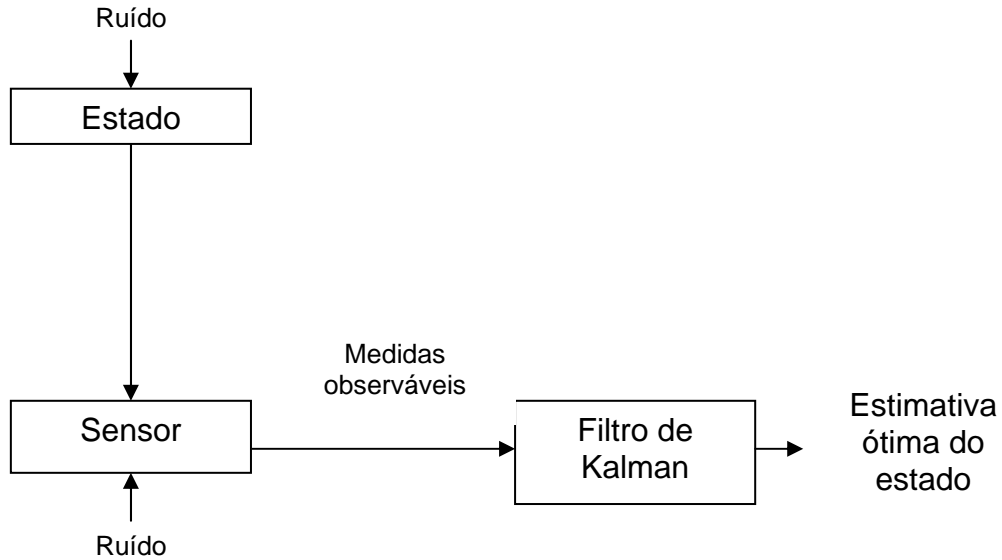


Figura-4 Diagrama para o Filtro de Kalman

De acordo com CAETANO (1997), o ciclo da estimação do estado por meio do Filtro de Kalman pode ser caracterizado pelo seguinte algoritmo:

$$\hat{x}_k^- = A \cdot \hat{x}_{k-1}^+ \\ P_k^- = A \cdot P_{k-1}^+ \cdot A^T + C \cdot Q \cdot C^T \quad (3)$$

$$K_k = P_k^- \cdot H^T \cdot (H \cdot P_k^- \cdot H^T + R)^{-1} \\ P_k^+ = P_k^- - K_k \cdot H \cdot P_k^- \\ \hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k \cdot [z_k - H \cdot \hat{x}_k^-] \quad (4)$$

O sistema (3) é responsável pela propagação do modelo. Já o sistema (4), chamado de sistema de medida, ou sensor, é responsável pela atualização de (3) tendo em vista o estado atual.

O termo A é uma matriz contém os parâmetros da equação (ou sistema de equações); C contém os parâmetros dos termos de ruído; H é a matriz com os parâmetros da equação (ou sistema de equações) do sensor; G contém os parâmetros dos termos de ruído do sensor; Q e R são os valores da diagonal principal da matriz de covariância; P_k^- é a matriz de covariância alimentada por Q e R ; \hat{x}_k^- é o valor filtrado; K_k é o ganho do Filtro de Kalman e z_k é o valor do sensor.

Abaixo, a Figura 5 (adaptada de BISHOP *et al* (2001)) ilustra como os sistemas e as equações interagem.

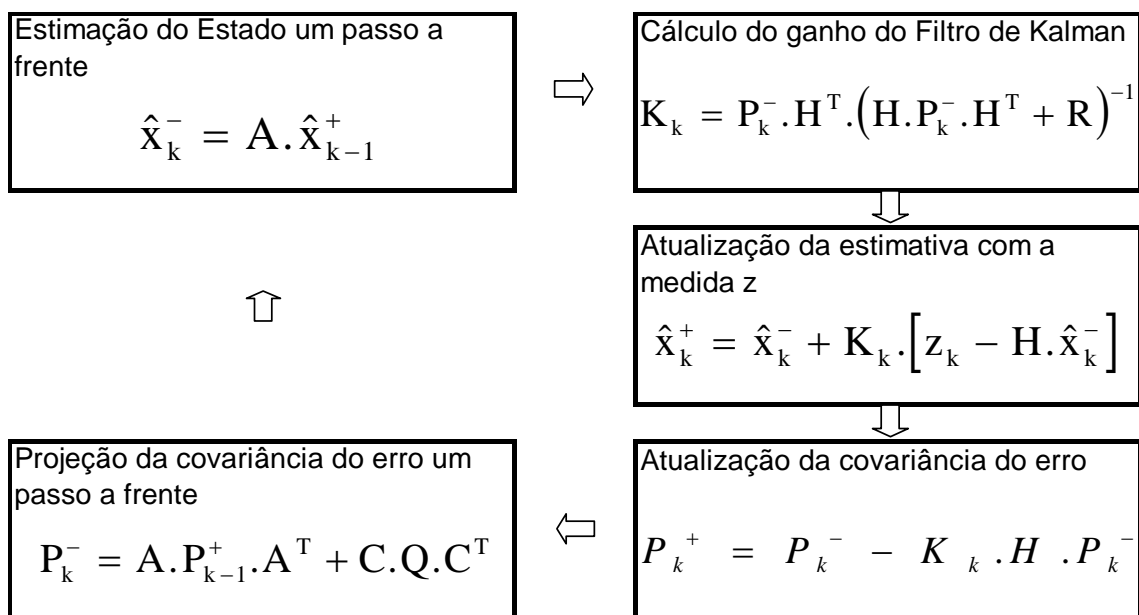


Figura-5 Funcionamento do algoritmo do Filtro de Kalman

A figura 6 mostra o funcionamento do Filtro de Kalman em uma situação de estimação de uma constante (Estado), neste caso, o número 5. Mas, antes de apresentar a Figura 6 serão apresentados os passos da estimação para que fique mais claro o entendimento prático do funcionamento do Filtro de Kalman.

Considerando a notação considerada em 3 e 4, seguem os valores dados para cada um dos fatores:

$$\begin{aligned}
A &= [1] \\
C &= [0.05] \\
H &= [1] \\
G &= [1] \\
Q &= [0.5] \\
R &= [0.3]
\end{aligned}$$

O primeiro passo consiste em fornecer uma estimativa inicial para a atualização da matriz de covariância (foi utilizado o número 1.4) e para o valor filtrado, neste caso, começamos com o número 3. O valor filtrado inicial foi escolhido de maneira a estar próximo ao valor real para que a estimativa do Filtro de Kalman se aproxime mais do valor real, já o valor da covariância foi escolhido arbitrariamente:

$$\begin{aligned}
P_k^+ &= 1.4 \\
\hat{x}_k^+ &= 3
\end{aligned}$$

Esses valores são utilizados para inicializar o filtro. A filtragem dos dados ocorre em tempo real, ou seja, à medida que o Estado acontece, o Sensor colhe dados e esses dados são repassados para o algoritmo de filtragem. Abaixo podem ser encontrados como ocorrem os fenômenos do Estado e sua captação pelo Sensor.

$$\begin{aligned}
Estado &= 1 \cdot 5 + 0.05 \cdot w = 4.9585 \\
Sensor &= 1 \cdot 4.9585 + 1 \cdot v = 4.3601
\end{aligned}$$

onde w e v seguem distribuições Normais com média zero e variância 1.

O segundo passo é a entrada dos valores no algoritmo do Filtro de Kalman. Aqui são armazenados os valores da estimativa anterior do valor filtrado, bem como a estimativa anterior da matriz de covariância.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k^- &= 1 \cdot 3 = 3 \\
P_k^- &= 1 \cdot 1.4 \cdot 1 + 0.05 \cdot 0.5 \cdot 0.05 = 1.4012
\end{aligned}$$

No terceiro passo é calculado o ganho do filtro de Kalman:

$$K_k = 1.4012 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1.4012 \cdot 1 + 0.3)^{-1} = 0.8237$$

O quarto passo atualiza a matriz de covariância:

$$P_k^+ = 1.4012 - 0.8237 \cdot 1 \cdot 1.4012 = 0.2471$$

Por fim, o último passo da primeira iteração do algoritmo. Neste ponto ocorreu a primeira rodada do fenômeno do Estado e a captação deste pelo sensor. Logo a estimação do Estado é atualizada:

$$\hat{x}_k^+ = 3 + 0.8237 \cdot [4.3601 - 1 \cdot 3] = 4.1203$$

Agora será apresentada a segunda iteração da mesma seqüência apresentada acima.

$$\textit{Estado} = 1 \cdot 5 + 0.05 \cdot w = 4.8807$$

$$\textit{Sensor} = 1 \cdot 4.9585 + 1 \cdot v = 5.0718$$

Segundo passo, entrada dos valores no algoritmo do Filtro de Kalman:

$$\hat{x}_k^- = 1 \cdot 4.1203 = 4.1203$$

$$P_k^- = 1 \cdot 0.2471 \cdot 1 + 0.05 \cdot 0.5 \cdot 0.05 = 0.2483$$

No terceiro passo é calculado o ganho do filtro de Kalman:

$$K_k = 0.2483 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 0.2483 \cdot 1 + 0.3)^{-1} = 0.4529$$

O quarto passo atualiza a matriz de covariância:

$$P_k^+ = 0.2483 - 0.4529 \cdot 1 \cdot 0.2483 = 0.1358$$

Por fim, o último passo da segunda iteração do algoritmo. Neste ponto ocorreu a segunda rodada do fenômeno do Estado e a captação deste pelo sensor. Logo a estimação do Estado é atualizada mais uma vez (se aproximando mais ainda do valor verdadeiro do Estado):

$$\hat{x}_k^+ = 4.1203 + 0.4529 \cdot [5.0718 - 1 \cdot 4.1203] = 4.5512$$

Esse procedimento foi repetido, no caso deste trabalho, quarenta vezes, de modo que foi possível obter uma estimativa precisa do Estado.

Retomando, a Figura 6 exhibe graficamente os passos acima apresentados.

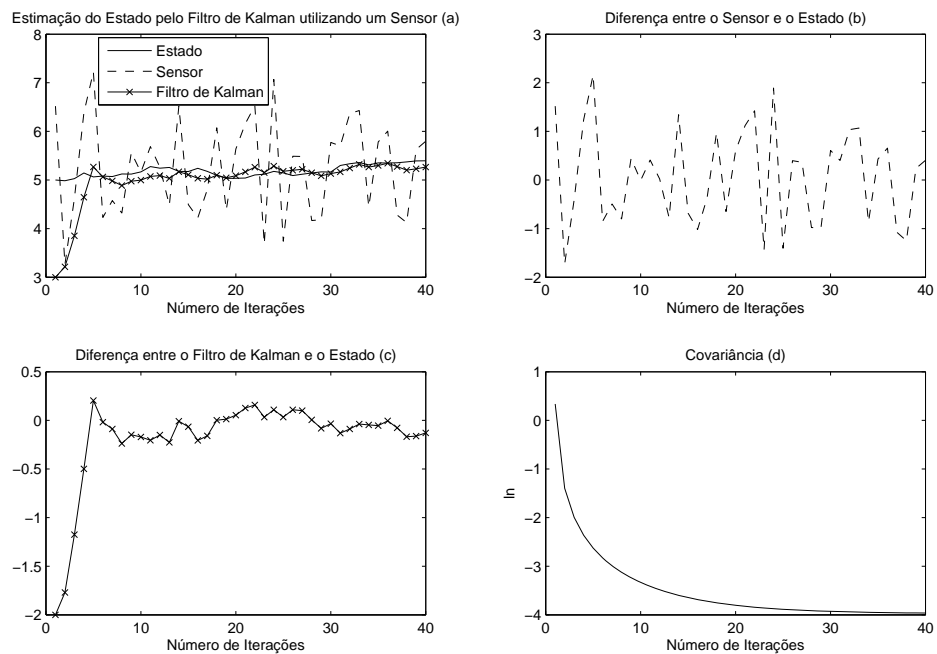


Figura-6 O aprendizado do Filtro de Kalman

Na Figura 6 (a) é possível observar o Estado, que se mantém constante no valor “5”, o Sensor, instrumento este que nos permite, de fato, observar o Estado e por fim o Filtro de Kalman.

Nota-se que se somente o Sensor fosse utilizado para estimar o Estado, incorrer-se-ia em um considerável erro, como pode ser observado na Figura 6 (b).

Já na Figura 6 (c) verifica-se que com pouco mais de 20 iterações, a estimação da constante é muito mais acurada do que se utilizando somente a medida do Sensor.

A perda de memória do Filtro de Kalman, ou seja, o peso que ele dá para as informações mais antigas, vai diminuindo com o passar das iterações até chegar muito próxima de zero. Isto indica que após o Filtro de Kalman utilizar as primeiras informações para se auto-calibrar, ele começa a considerar apenas as novas informações para a estimação do Estado.

Na situação acima descrita não foi considerado ruído no Estado, o que, em muitas das vezes não é o caso. Retomando o exemplo já citado neste trabalho da observação de um objeto, faz sentido imaginar que a maioria dos fenômenos da natureza sofre interferência na sua ocorrência. Então, para mostrar que o Filtro de Kalman consegue lidar com ruído tanto no Estado quanto no Sensor, a seguir será mostrada uma equação com ruído e a estimação de seu Estado através de um Sensor também com ruído. x_t e z_t são, respectivamente, Estado e Sensor e ω_t e ν_t são termos de ruído com distribuição Normal com média zero e variância igual à unidade.

$$\begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_t \\ \nu_t \end{bmatrix} \quad (5)$$

A Figura 7 mostra os resultados da simulação desse sistema.

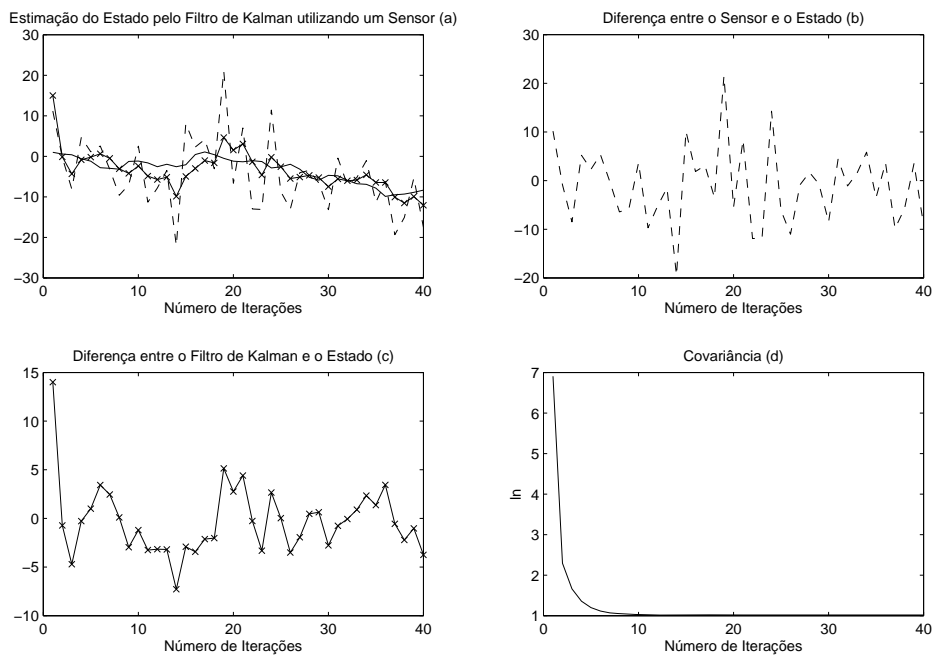


Figura-7 O Aprendizado do Filtro de Kalman considerando ruído também no Estado

Por mais uma vez a estimação do Estado foi superior quando utilizado o Filtro de Kalman do que utilizando somente o sensor. Tanto observando somente a Figura 7 (a) quanto comparando a Figura 7 (b) com a Figura 7 (c), nota-se que a utilização do Filtro de Kalman como instrumento de estimação do Estado é de muita valia e este deve ser incorporado a qualquer Sensor para que não sejam geradas estimativas muito aquém daquilo que o Estado manifesta. Em último lugar, vê-se que a covariância tem o mesmo comportamento daquele que o apresentado na Figura 6, o que já era esperado, pois não existe alteração no funcionamento do Filtro de Kalman quando é incluído ruído no Estado.

3. Identificação de Sistemas

O algoritmo discreto do Filtro de Kalman, como o nome já explica, implica que o sistema em questão será tratado em tempo finito. Além disso, é necessário que o sistema seja linear. Este trabalho utiliza essa forma do Filtro de Kalman e, portanto, deve contornar esses problemas, pois o sistema Presa-Predador é contínuo e não linear.

O Filtro de Kalman Estendido é o formato do Filtro de Kalman com alterações que permitem que ele funcione com sistemas não lineares e contínuos. Porém, o presente trabalho optou por utilizar sua forma discreta de maneira a ser possível a demonstração de duas importantes ferramentas matemáticas, a discretização e linearização de sistemas não contínuos e não lineares.

Esta seção tem como objetivo introduzir dois métodos de discretização de sistemas de equações diferenciais ordinárias. A questão da linearização de sistemas será tratada na próxima subseção.

De modo geral, a maioria dos métodos de integração de equações diferenciais ordinárias (resolução numérica das EDO's) parte de Expansões de Taylor (GELB 1974, p. 294). As Expansões de Taylor são utilizadas para aproximar o valor de uma função em um ponto através de um polinômio.

O primeiro método a ser apresentado é o Método de Euler (como em GELB 1974, p. 294).

Partindo-se de uma condição inicial, a equação

$$\dot{x} = F(x, t)$$

pode ser aproximada utilizando-se Expansões de Taylor para

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t-t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)(t-t_0)^2}{2!} + \frac{\dddot{x}(t_0)(t-t_0)^3}{3!} + \dots + \frac{x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n}{n!}$$

Ao considerar somente os dois primeiros termos do lado direito da equação acima, tem-se:

$$x(t_1) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t-t_0)$$

No ponto t_0 a derivada terá o mesmo valor da função. Então,

$$x(t_1) = x(t_0) + F(x_0, t_0)(t-t_0) \quad (6)$$

A Equação 6 é conhecida como método de Euler e diz que o valor da função no próximo ponto, ou seja no momento t_{k+1} , é dado pelo valor da função no ponto t_k (lembrando que esta é a condição inicial necessária), mais o valor da função F em t_k multiplicado pelo tamanho do passo, $t_{k+1} - t_k = \Delta t$.

Quanto maior o tamanho do passo Δt , pior será a aproximação. Além disso, à medida que o tempo transcorre, o erro de cada passo de integração vai se acumulando e isto acarreta uma rápida divergência.

Esta equação pode ser reescrita em forma matricial da seguinte forma:

$$A^{discreto} = I + A\Delta t + \frac{A^2 \Delta t^2}{2!} + \frac{A^3 \Delta t^3}{3!} + \dots$$

$$x_{k+1} = A^{discreto} x_k$$

Tendo em vista os problemas acima apresentados sobre a precisão do método de Euler, a seguir será apresentado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, ou simplesmente, Runge-Kutta.

De acordo com Boyce e DiPrima (2001), Runge-Kutta é mais preciso que o método de Euler na ordem de três grandezas, isto é, ele é exponencialmente 3 vezes mais preciso que o método de Euler. Sendo assim, ele precisa de duas vezes mais cálculos, porém tem erro em torno de 200 vezes menor que o método de Euler.

O método pode ser chamado de *bootstrap*, pois utiliza resultados de um passo anterior para calcular o passo atual (assim como o método de Euler), além de também precisar de um valor inicial.

Ainda de acordo com Boyce e DiPrima (2001), segue abaixo como Runge-Kutta integra as funções:

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_1)$$

$$k_3 = f(t_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_2)$$

$$k_4 = f(t_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_3)$$

Trata-se de uma média ponderada da função f em pontos diferentes dentro do tamanho do passo escolhido.

Caso a função f não dependa de y e tão somente do tempo, alteramos a equação acima para:

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{(f(t_n) + 4f(t_n + 0.5h) + f(t_n + h))}{6}$$

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_1)$$

$$k_3 = f(t_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_2)$$

$$k_4 = f(t_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_3)$$

Muitas das vezes este não será o caso, pois em sistemas dinâmicos o passado da função é importante para o valor da função no tempo presente e no futuro.

A próxima figura mostra um comparativo de três métodos de integração. São eles a integração analítica (quando a função pode ser resolvida analiticamente), o método de Runge-Kutta e o método de Euler.

A equação diferencial

$$\dot{y} = -y$$

tem solução analítica conhecida e igual a

$$y(t) = e^{-t}$$

e quando integrada, variando apenas o método utilizado, apresenta as seguintes formas:

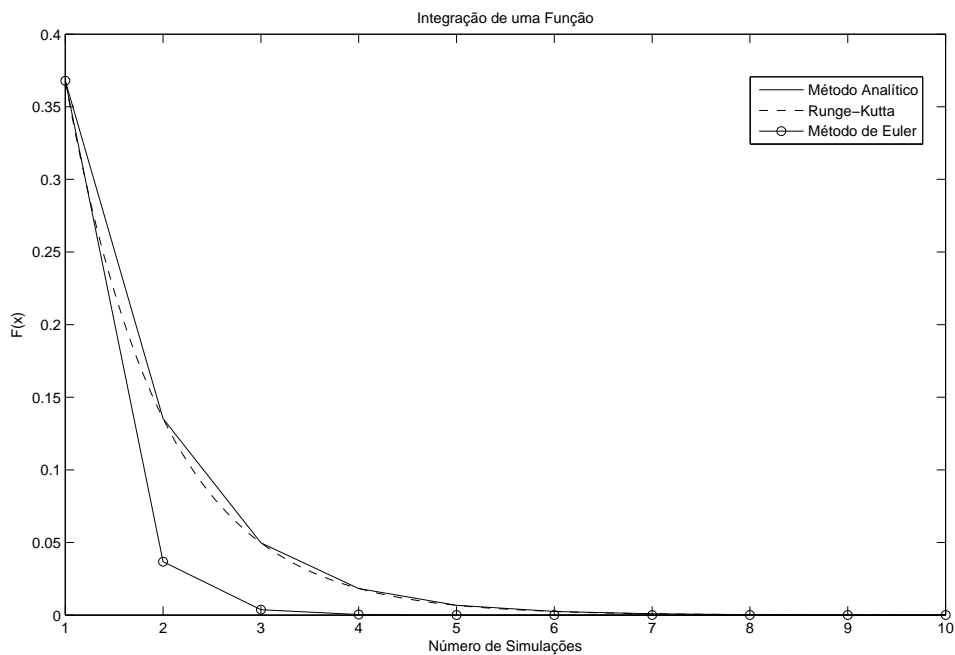


Figura-8 Comparativo entre métodos de integração numérica

Nota-se observando a Figura 8 que para cada ponto da simulação (a simulação teve uma duração de 10 períodos e a distância entre um período e outro é igual à unidade), o método de Runge-Kutta obteve resultados praticamente iguais aos da função resolvida pelo método analítico. Por outro lado, o Método de Euler (utilizando um $\Delta t = 0,9$) divergiu da solução verdadeira da função exponencial logo no primeiro passo de integração.

Assim, foi mostrado que o método de Runge-Kutta é superior ao método de Euler, como mostra a literatura específica, e este não mais será utilizado neste trabalho (toda rotina de integração será realizada através do método de Runge-Kutta).

Após um modelo ter sido escolhido, deve-se estimar os parâmetros, que são desconhecidos, e para isso faz-se necessário a escolha de um método de estimação.

A escolha de um bom método de estimação de parâmetros é decisiva para a qualidade final de modelagem, pois se pretende obter estimativas consistentes e eficientes. A literatura dá o nome de “identificação de modelos” ao processo de ajustar as estimativas dos parâmetros de modo que o modelo proposto consiga descrever de maneira próxima daquilo que os dados reais representam (CAETANO *et al* 2007).

No trabalho de CAETANO *et al* 2007, foi utilizado o Filtro de Kalman Estendido para a identificação do modelo, porém, pelos motivos propostos no início da subseção 2.3, este trabalho irá fazer uso da versão discreta (padrão) do Filtro de Kalman.

A teoria exposta nas subseções anteriores sobre o Filtro de Kalman é a mesma nesta seção, porém, neste caso o Filtro é utilizado de forma inversa. Portanto, a partir de uma série de dados e de um modelo que se espera consiga descrever bem os dados, deseja-se descobrir quais são os parâmetros (através de estimativas) do Estado, ou seja, quais são os parâmetros que melhor aproximam o modelo do verdadeiro processo gerador de dados.

É importante ressaltar que o método de estimação utilizado tem como pano de fundo a estimação recursiva, na qual a estimativa do parâmetro é igual à estimativa anterior com a adição de um fator de correção. É nesse fator de correção que o Filtro de Kalman trabalha minimizando o erro de estimação.

A seguir, serão expostos dois exemplos para ilustrar o funcionamento do Filtro de Kalman como estimador ótimo linear. Em ambos os exemplos é assumido um Sensor exato, ou seja, que consegue captar o Estado sem distorções. No Exemplo 1 é utilizada a identificação de Kalman.

Na identificação de Kalman o Filtro de Kalman é invertido para que se possa conseguir o valor dos parâmetros. Isso é feito de acordo com o seguinte conjunto de equações, o qual foi configurado para identificar o sistema Presa-Predador e que foi adaptado para identificar as equações utilizadas nos Exemplos 1 e 2.

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,1}^{k+1} &= \hat{a}_{1,1}^k + k_1(x - \hat{a}_{1,1}^k) \\ \hat{a}_{1,2}^{k+1} &= \hat{a}_{1,2}^k + k_2(y - \hat{a}_{1,2}^k) \\ \hat{a}_{2,1}^{k+1} &= \hat{a}_{2,1}^k + k_1(x - \hat{a}_{2,1}^k) \\ \hat{a}_{2,2}^{k+1} &= \hat{a}_{2,2}^k + k_2(y - \hat{a}_{2,1}^k) \end{aligned}$$

Exemplo 1 – a equação,

$$y(t) = -t^2 + 2t + 6 + \omega$$

foi simulada até $t=20$ com um passo de 0.1 .

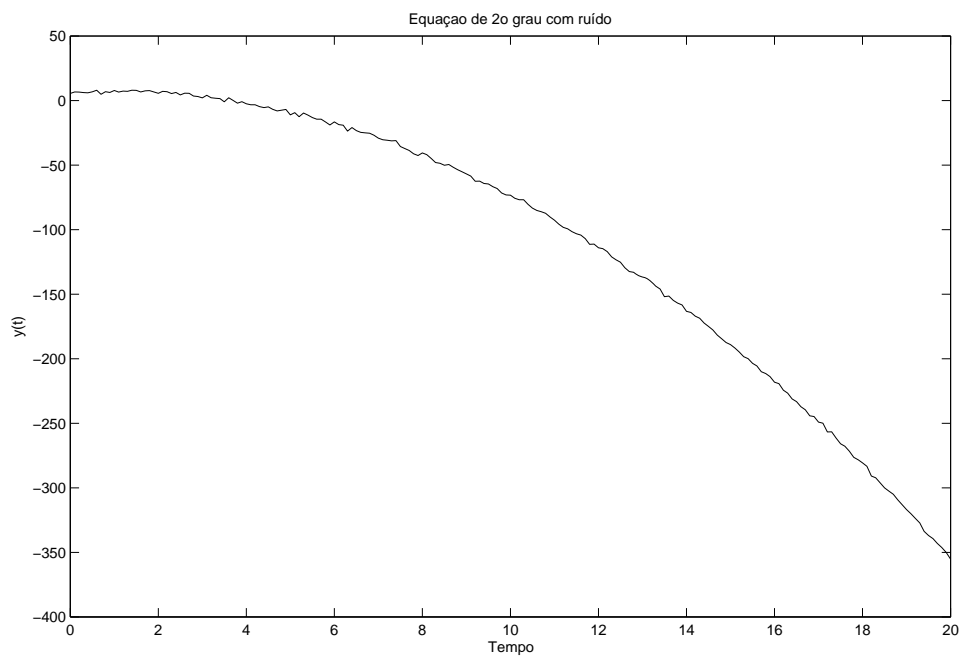


Figura-9 Filtro de Kalman para identificação de modelo, Exemplo 1

Utilizando esta equação como modelo e tendo os valores simulados de t , t^2 e uma constante igual à unidade, foram obtidos os seguintes valores para os parâmetros que foram fixados anteriormente, porém não foi dada nenhuma indicação dos mesmos para o Filtro de Kalman.

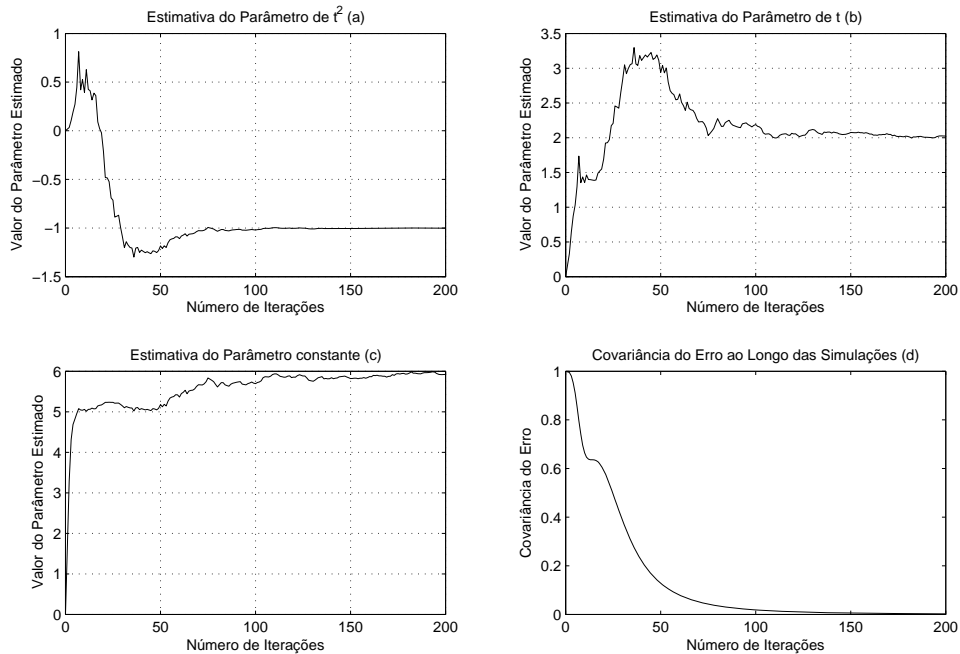


Figura-10 Identificação de Modelo com ruído utilizando o Filtro de Kalman, Exemplo 1

As Figuras 9 (a), (b) e (c) mostram como o Filtro de Kalman estima os parâmetros ao longo do número de iterações até atingir e persistir nos valores verdadeiros dos parâmetros.

A Figura 9 (d) mostra a perda de memória ao longo do tempo até atingir valores muito próximos de zero para a covariância do erro. Neste caso, foi escolhida a covariância do erro de estimação de t^2 , porém, a representação não é diferente para os outros dois parâmetros estimados.

Exemplo 2: trata-se da mesma equação do Exemplo 1, porém o termo de ruído teve sua importância aumentada em 50 vezes. Esta foi a única alteração efetuada. O número de iterações e a estrutura do Filtro de Kalman continuam as mesmas.

$$y(t) = -t^2 + 2t + 6 + 50\omega$$

O termo w segue uma distribuição Normal com média zero e variância um.

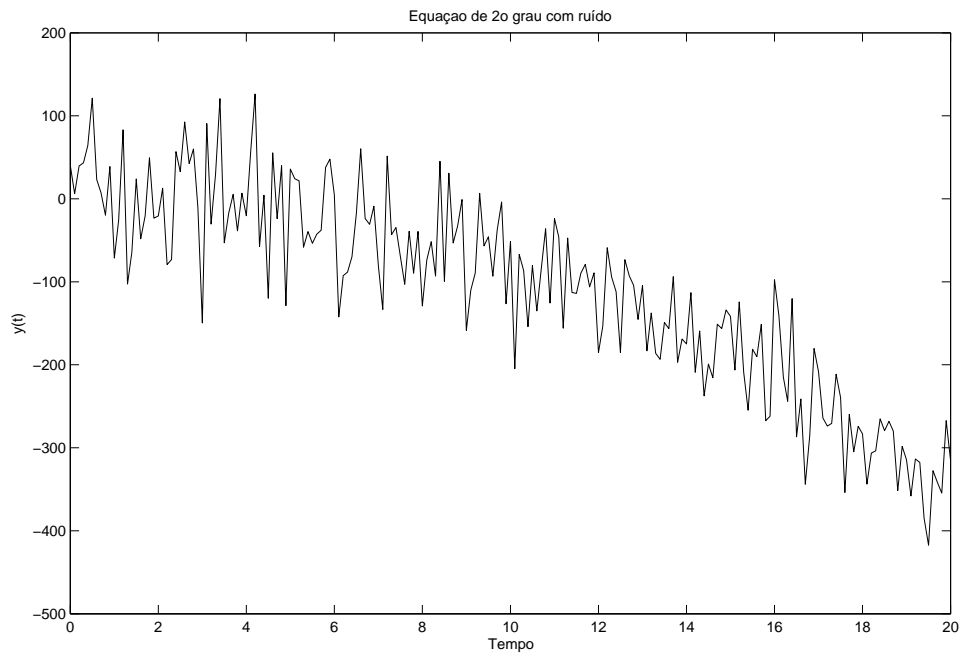


Figura-11 Filtro de Kalman para identificação de modelo, Exemplo 2

Comparando a Figura 11 com a Figura 9, é possível perceber o impacto que um termo ruidoso mais forte apresenta na função da parábola. O ruído disfarça o formato típico da parábola, podendo levar a erros de interpretação caso ele não seja filtrado e essa é uma das principais aplicações do Filtro de Kalman.

Seguindo os mesmos passos do Exemplo 1, obtêm-se as seguintes estimativas para o modelo (Figura 12):

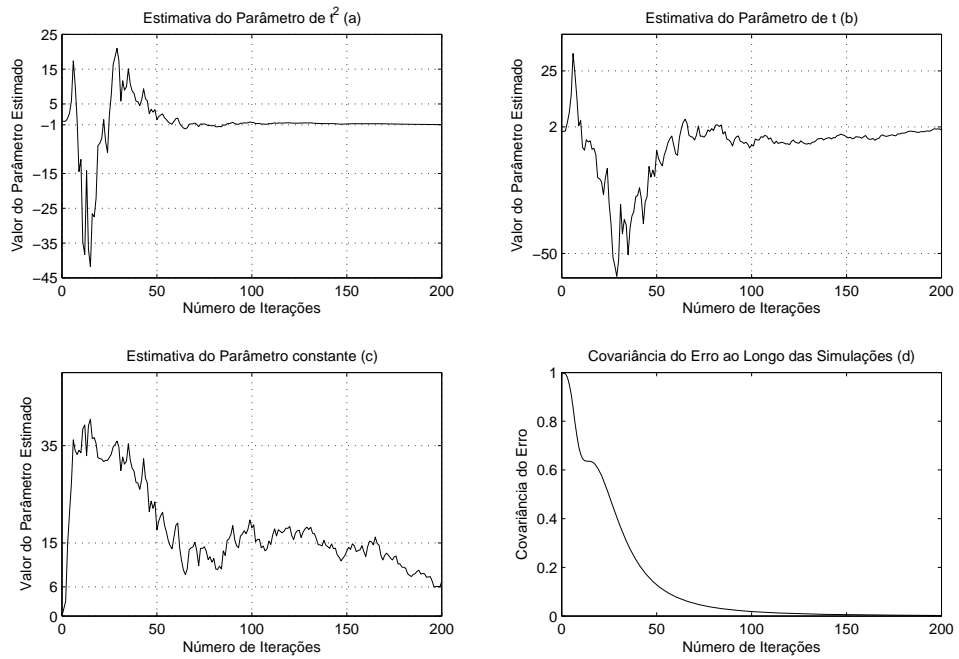


Figura-12 Identificação de Modelo com ruído utilizando o Filtro de Kalman, Exemplo 2

É importante notar que mesmo tendo o ruído sido aumentado em 50 vezes e sem alterar o número de iterações, as estimativas atingiram e permaneceram nos valores dos parâmetros. O termo ao quadrado, linear e a constante foram estimados com sucesso. Além disso, quando comparado o número de passos necessários para que o Filtro de Kalman encontrasse os valores dos parâmetros, tanto no Exemplo 1, no qual o ruído tinha pouca importância quanto no Exemplo 2, onde o ruído aumentou consideravelmente, esse valor (o número de iterações) é o mesmo nas duas simulações.

4. Resultados e Simulações

Tendo como principal objetivo a modelagem do comportamento dos índices de ações em situações peculiares, como naquelas em que os índices apresentam comportamento semelhante ao do modelo Presa-Predador, esta seção irá apresentar o comportamento dos dados e sua posterior modelagem.

Uma possível representação para o modelo Presa-Predador em forma discreta e não linear (adaptada de BOYCE e DiPrima 2001) é dada por:

$$\begin{aligned}y_{1,t} &= y_{1,t-1} - 0.01y_{1,t-1}y_{2,t-1} \\ y_{2,t} &= -y_{2,t-1} + 0.02y_{1,t-1}y_{2,t-1}\end{aligned}$$

y_1 , população da presa

y_2 , população do predador

Tal sistema de equações tem as seguintes características:

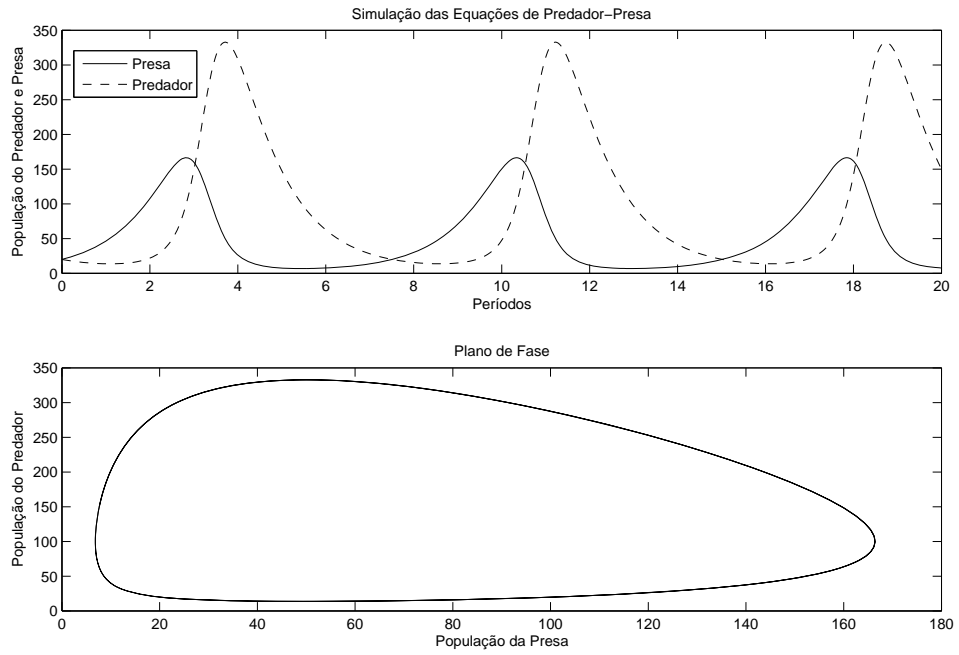


Figura-13 Simulação do Sistema Presa Predador e Plano de Fase

O comportamento estável das populações de presas e predadores será o padrão procurado nos planos de fase dos índices de ações.

A Figura 14 mostra esses planos de fases e as regiões que possivelmente poderão ser modeladas utilizando-se o comportamento das populações descrito acima.

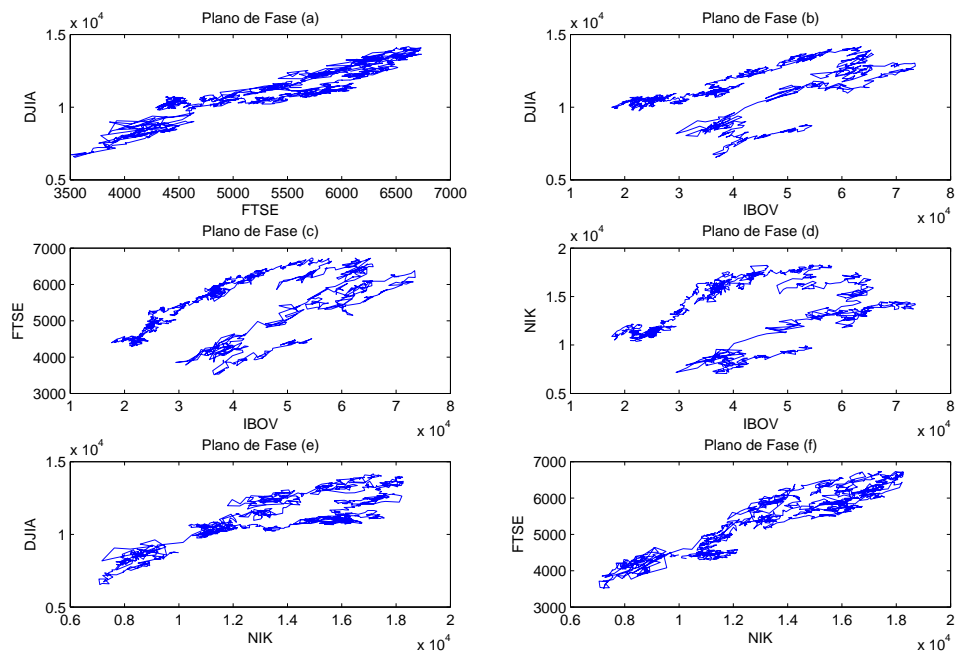


Figura-14 Planos de fase dos índices analisados

É possível observar que em diversos momentos o comportamento dos índices apresenta comportamento semelhante ao Plano de Fase da Figura 13, embora no caso dos índices tal comportamento seja oscilatório e errático.

As regiões que apresentam esse comportamento estável serão utilizadas para a estimação de parâmetros do modelo Presa-Predador, utilizando-se o Filtro de Kalman.

Antes de aplicar a rotina apresentada na seção anterior para estimação desses parâmetros, será demonstrado como foi construído e validado o sistema para a estimação.

Abaixo pode ser encontrada a Figura 15, que representa o sistema utilizado para validação.

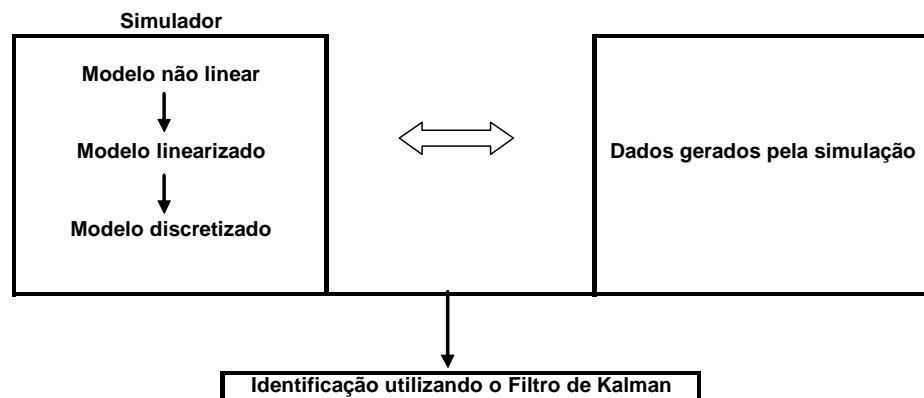


Figura-15 Diagrama para representação e validação do Filtro de Kalman como estimador dos Parâmetros do sistema Presa-Predador

A partir do sistema Presa-Predador não linear, obtém-se primeiro esse sistema em sua forma linear, como foi mostrado na seção anterior. Por último, o sistema Presa-Predador linear é discretizado e este é utilizado para gerar dados para as populações de presas e predadores.

Considerando esses dados, é utilizado o Filtro de Kalman para estimar os parâmetros do sistema discretizado, os quais são conhecidos *a priori*. Porém o Filtro de Kalman não tem qualquer informação sobre isso, ele será alimentado com os dados simulados a partir do sistema discretizado.

Depois de identificado o sistema discretizado, os resultados serão comparados com os verdadeiros parâmetros e será efetuado o cálculo inverso para se chegar aos parâmetros do sistema linearizado e então no sistema não linear. Novamente, essas estimativas serão comparadas com os parâmetros que eram conhecidos *a priori* e foram utilizados para criar todo esse sistema de representação e validação.

A partir do sistema Presa-Predador não linear apresentado a seguir (Boyce e DiPrima 2001), é iniciado o processo descrito nos dois parágrafos anteriores:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 0.5xy \\ \dot{y} &= -0.75y + 0.25xy \end{aligned}$$

Igualando essas duas equações a zero é possível encontrar dois pontos críticos, $(x^*, y^*) = (0, 0)$ e $(x^{**}, y^{**}) = (3, 2)$.

Deseja-se escolher um ponto crítico estável para que o sistema seja linearizado em torno dele, para isso, deve-se estudar a estabilidade de cada um desses dois pontos críticos.

Em forma matricial, o sistema é dado por:

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.5y & -0.5x \\ 0.25y & -0.75 + 0.25x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Então, são substituídos os pontos críticos encontrados, o que fornece:

$$(x^*, y^*) = (0, 0)$$

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(x^{**}, y^{**}) = (3, 2)$$

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Agora se deve construir a matriz Jacobiana para cada um desses pontos. A matriz Jacobiana é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

A partir de cada uma delas, devem-se analisar os autovalores λ quanto a seus sinais e dimensões para determinar a estabilidade ou não de cada ponto.

Tomando-se como A a matriz Jacobiana, os autovalores devem ser calculados da seguinte forma,

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

onde I , diz respeito à matriz identidade.

$$(x^*, y^*) = (0, 0)$$

$$(1 - \lambda)(-0.75 - \lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - 0.25\lambda - 0.75 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -0.75$$

Como um dos autovalores apresenta valor maior que zero e o outro menor do que zero, diz-se que esse sistema é instável.

$$(x^{**}, y^{**}) = (3, 2)$$

$$\lambda^2 + 0.75 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.86i$$

$$\lambda_2 = -0.86i$$

Como ambos os autovalores são números imaginários, o ponto $(x^{**}, y^{**}) = (3, 2)$ é estável.

Será em torno deste ponto que o sistema será discretizado, dado que a partir dele o sistema também foi discretizado.

Novamente, com base na metodologia apresentada na seção anterior, tomando como tempo de discretização $T=1$, teremos o sistema Presa-Predador discretizado.

$$A^{discreto} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} T$$

$$A^{discreto} = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Só agora é possível simular os dados para as populações de presas e predadores a fim de representar e validar o sistema que está sendo utilizado. É importante lembrar que os processos de linearização e discretização se fizeram necessários devido à utilização do Filtro de Kalman Discreto, o qual não aceita sistemas não lineares em tempo contínuo.

Portanto, o sistema

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

será simulado até um tempo máximo igual a 11 e com condições iniciais

$$x_{t=0} = 0.5$$

$$y_{t=0} = 0.5$$

A próxima figura, Figura 16, mostra a simulação deste sistema, na qual a linha contínua representa a população de presas e a linha pontilhada a população de predadores.

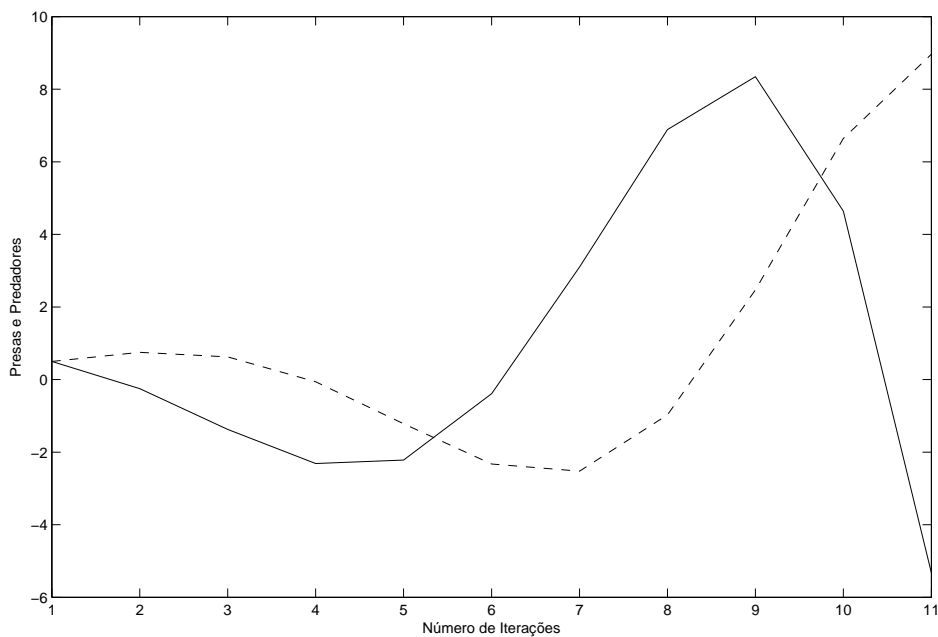


Figura-16 Simulação do Sistema Presa-Predador linear e discreto

Tendo os dados para as populações de presas e predadores, é possível dar seqüência na explicação do sistema. A Figura 17 atualiza a Figura 15, mostrando o mesmo diagrama, agora com as respectivas equações.

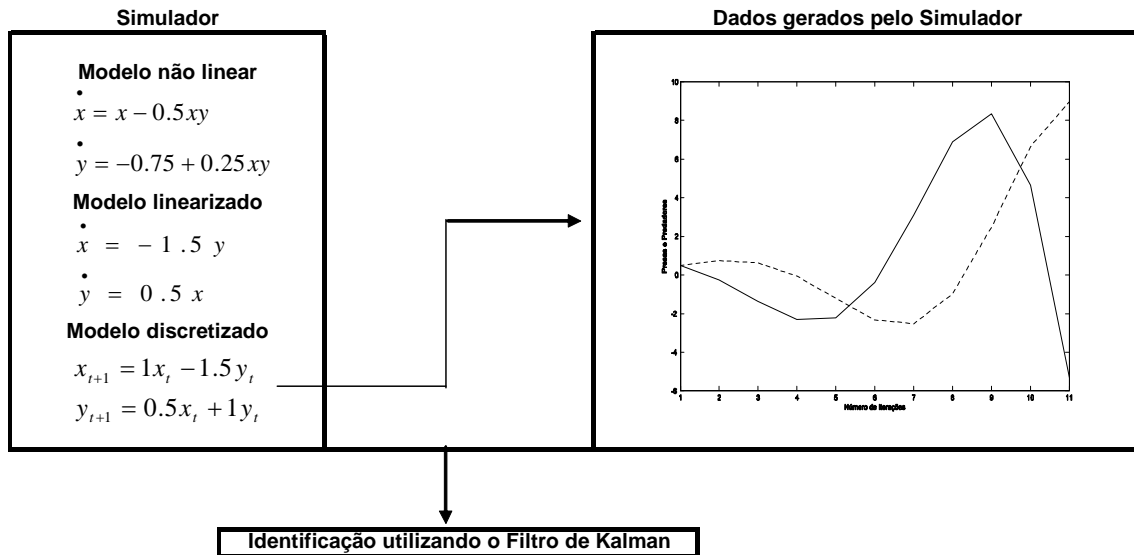


Figura-17 Diagrama atualizado para representação e validação do Filtro de Kalman

Neste momento será aplicado o Filtro de Kalman para estimação dos parâmetros do sistema Presa-Predador linear e discreto.

A Figura 18 mostra as estimativas de cada um dos parâmetros bem como a memória do filtro ao longo do processo.

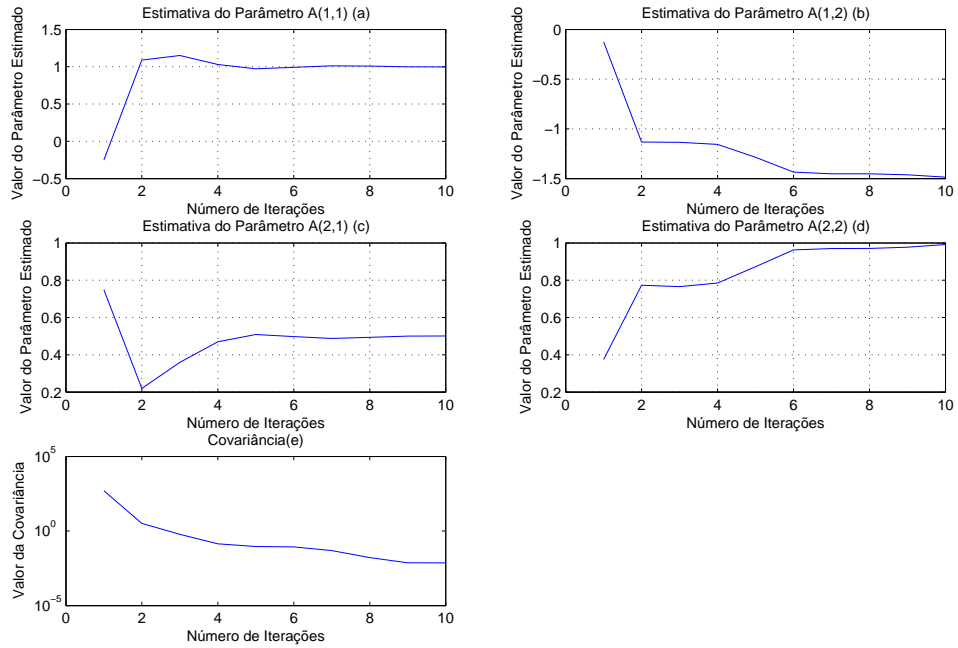


Figura-18 Identificação dos Parâmetros do sistema para representação e validação do Filtro de Kalman

Comparando o valor do parâmetro estimado pela Figura 18(a) com o valor de $A(1,1)$ do sistema Presa-Predador linear e discreto que foi simulado, é possível concluir que a partir dos dados o Filtro de Kalman foi capaz de estimar com alta precisão o verdadeiro parâmetro, 1. O mesmo acontece para as Figuras 18(b)(c)(d), onde a estimação convergiu respectivamente para $A(1,2)$ igual a -1.5, $A(2,1)$ igual a 0.5 e $A(2,2)$ igual a 1.

Considerando-se essas estimativas, deseja-se agora obter os valores dos parâmetros do sistema linear e do sistema não linear.

Para o sistema linear, deve-se realizar o seguinte procedimento:

$$A_{1,1}^{linear} = \frac{A_{1,1}^{discreto} - 1}{T}$$

$$A_{1,2}^{linear} = \frac{A_{1,2}^{discreto}}{T}$$

$$A_{2,1}^{linear} = \frac{A_{2,1}^{discreto}}{T}$$

$$A_{2,2}^{linear} = \frac{A_{2,2}^{discreto} - 1}{T}$$

Desse modo, obtém-se:

$$A_{1,1}^{linear} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$A_{1,2}^{linear} = \frac{-1.5}{1} = -1.5$$

$$A_{2,1}^{linear} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

$$A_{2,2}^{linear} = \frac{1-1}{T} = 0$$

Comparando esses valores com os valores do sistema linear na Figura 17, verifica-se que se conseguiu sair do sistema discreto e retornar ao sistema linear.

Finalmente, deseja-se sair do sistema linear e chegar ao sistema não linear. Para isso, o processo é semelhante ao processo de se sair do sistema discreto e ir para o sistema linear: invertem-se os cálculos realizados para que fosse feita a linearização (pois agora se deseja partir do sistema linear e chegar ao sistema não linear).

Para obter os parâmetros do sistema não linear deve-se resolver o seguinte sistema:

$$A_{1,1}^{linear} = A_{1,1}^{n\tilde{a}olinear} - A_{1,2}^{n\tilde{a}olinear} y^*$$

$$A_{1,2}^{linear} = -A_{1,2}^{n\tilde{a}olinear} x^*$$

$$A_{2,1}^{linear} = A_{2,2}^{n\tilde{a}olinear} y^*$$

$$A_{2,2}^{linear} = -A_{2,1}^{n\tilde{a}olinear} + A_{2,2}^{n\tilde{a}olinear} x^*$$

onde x^* e y^* representam o ponto no qual o sistema foi linearizado. Assim, tem-se quatro equações e quatro incógnitas, pois os valores dos parâmetros lineares foram obtidos no processo anterior e o valor do ponto em torno do qual o sistema foi linearizado é sabido desde que se estudou a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema Presa-Predador proposto.

Resolvendo o sistema é possível obter:

$$A_{1,2}^{n\tilde{a}olinear} = -\frac{A_{1,2}^{linear}}{x^*} = -\frac{-1.5}{3} = 0.5$$

$$A_{1,1}^{n\tilde{a}olinear} = A_{1,1}^{linear} + A_{1,2}^{n\tilde{a}olinear} y^* = 0 + 0.5 \cdot 2 = 1$$

$$A_{2,2}^{n\tilde{a}olinear} = \frac{A_{2,1}^{linear}}{y^*} = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

$$A_{2,1}^{n\tilde{a}olinear} = -A_{2,2}^{linear} + A_{2,2}^{n\tilde{a}olinear} x^* = -0 + 0.25 \cdot 3 = 0.75$$

Quando se reorganizam esses valores, substituindo-os no sistema Presa-Predador não linear proposto, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 0.5xy \\ \dot{y} = -0.75y + 0.25xy \end{cases}$$

que é exatamente o modelo inicial. É possível notar que os valores obtidos no passo de transformação dos parâmetros lineares para não lineares, os valores obtidos para os parâmetros da diagonal secundária, são positivos, quando na verdade deveriam ser

negativos. Isso aconteceu pois a natureza do sistema Presa-Predador proposto já implica sinais negativos nesses parâmetros, então quando substituímos as estimativas, obtém-se o sistema exatamente como ele foi concebido pela primeira vez.

A Figura 19 apresenta a simulação do sistema não linear Presa-Predador.

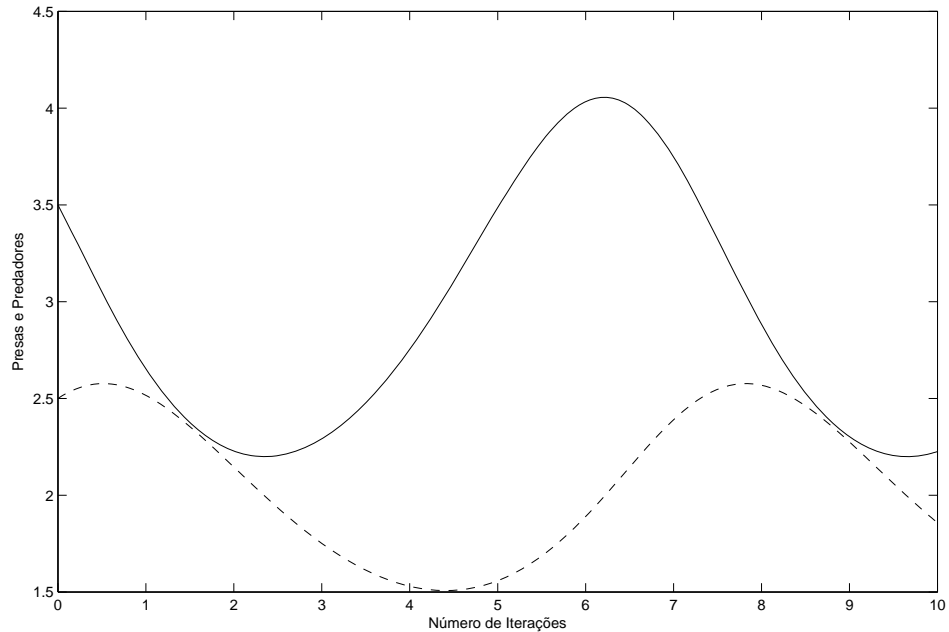


Figura-19 Sistema de equações Presa-Predador não linear utilizado na representação e validação do Filtro de Kalman

A Figura 20 resume o processo apresentado: inicia-se o processo pelo sistema não linear; 1) o sistema não linear é linearizado; 2) o sistema linearizado, o qual ainda está em tempo contínuo, é discretizado; 3) utiliza-se a identificação de Kalman para determinar o valor dos parâmetros do sistema linear e discreto; 4) faz-se o processo inverso de discretização para que seja possível obter os parâmetros para o sistema linear; 5) faz-se o processo inverso de linearização para que seja possível obter os parâmetros do sistema não linear; 6) retorna-se ao sistema não linear inicial.

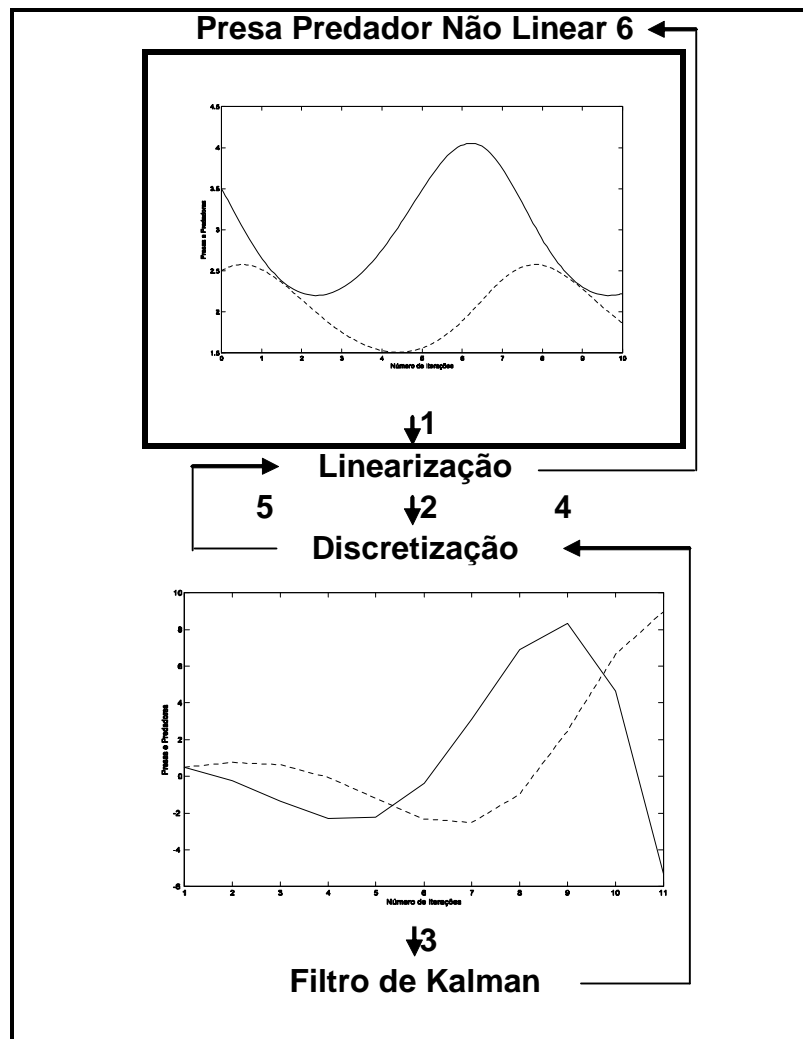


Figura-20 Resumo do procedimento de representação e validação do Filtro de Kalman

Foi possível obter estimativas praticamente iguais aos parâmetros conhecidos *a priori*, igualando assim os resultados encontrados pela literatura.

Posto isso, agora é o momento de aplicar esta rotina aos dados de índices de ações de bolsas de valores de diferentes partes do planeta. Os índices utilizados são: DJI (Nova York), NIK (Japão), IBOV (Brasil) e FTSE (Londres).

As Figuras 21 e 22 mostram duas regiões no tempo em que os índices apresentaram comportamento muito similar ao do sistema Presa-Predador, quando observado o Plano de Fase. O IBOV faz o papel de presa e o DJI faz o papel de predador. Essa escolha foi feita devido ao tamanho e importância dos mercados e esse raciocínio será repetido para as outras combinações de índices apresentadas nesse trabalho.

É importante salientar que todos os índices foram normalizados pelo seu respectivo valor máximo, ou seja, toda a série foi dividida pelo valor máximo do período.

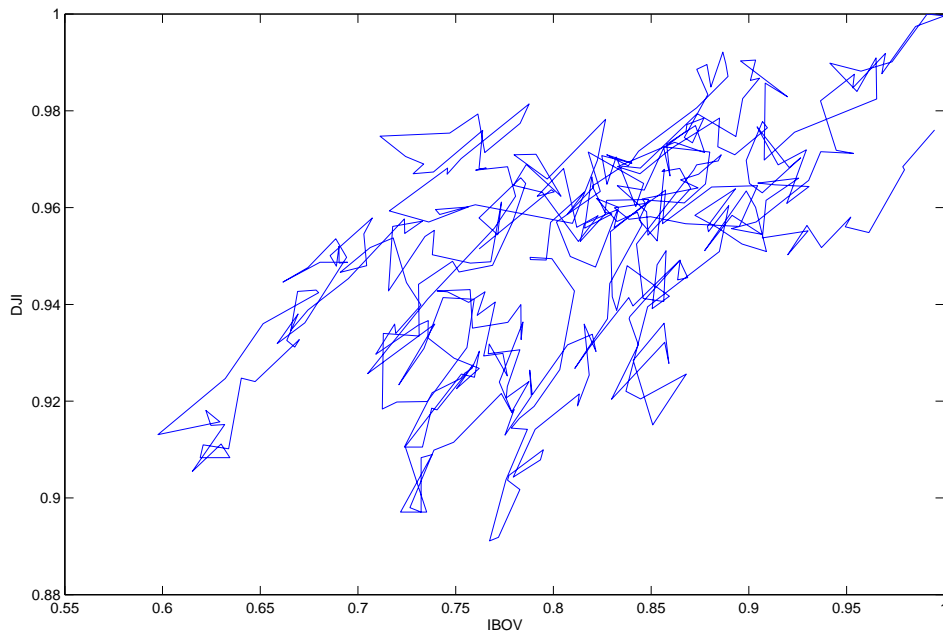


Figura-21 Plano de Fase IBOV x DJI

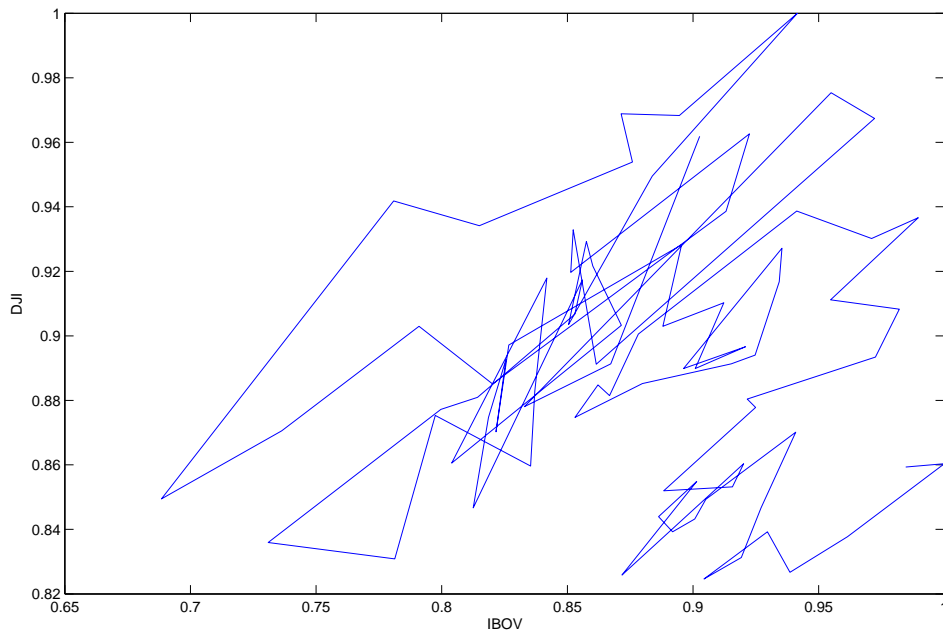


Figura-22 Plano de Fase IBOV x DJI

A observação desses Planos de Fase mostra que a resposta de um índice dado os pontos do outro índice é bastante amplificada. Nesses períodos não é possível observar movimentos suaves, esféricos, como aqueles observados no Plano de Fase do sistema Presa-Predador. Portanto, isso representa um empecilho à estimação, pois tal comportamento não é natural no sistema Presa-Predador.

Os próximos Planos de Fase são bastante parecidos com os das Figuras 21 e 22, porém, em alguns deles o comportamento será sensivelmente menos errático que esse apresentado. A explicação para isso está na natureza dos mercados. O Brasil é um país emergente e oferece mais risco que mercados desenvolvidos como Estados Unidos, Inglaterra e Japão.

As Figuras 23 e 24 mostram os Planos de Fase para FTSE e DJI, presa e predador respectivamente.

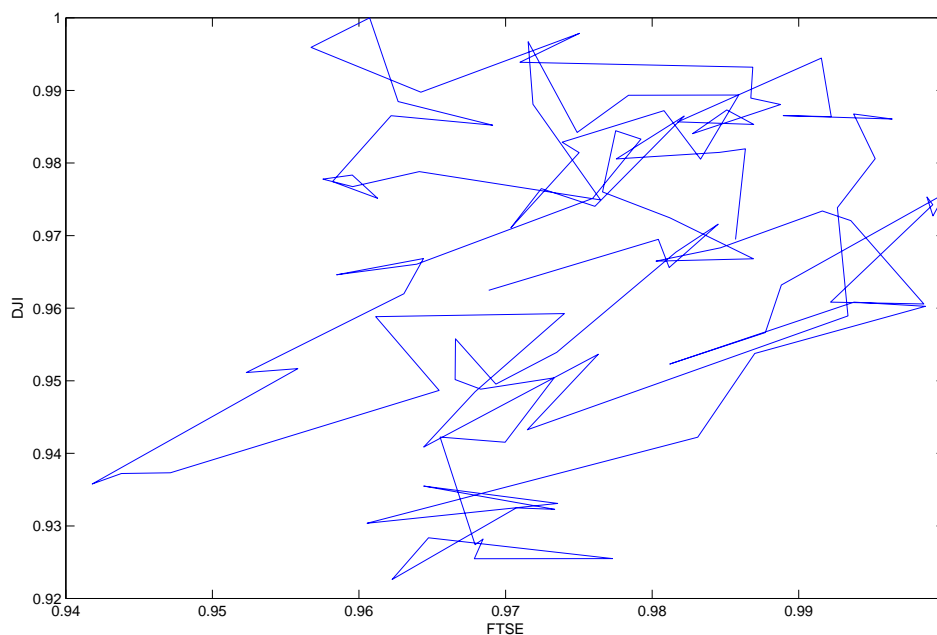


Figura-23 Plano de Fase FTSE x DJI

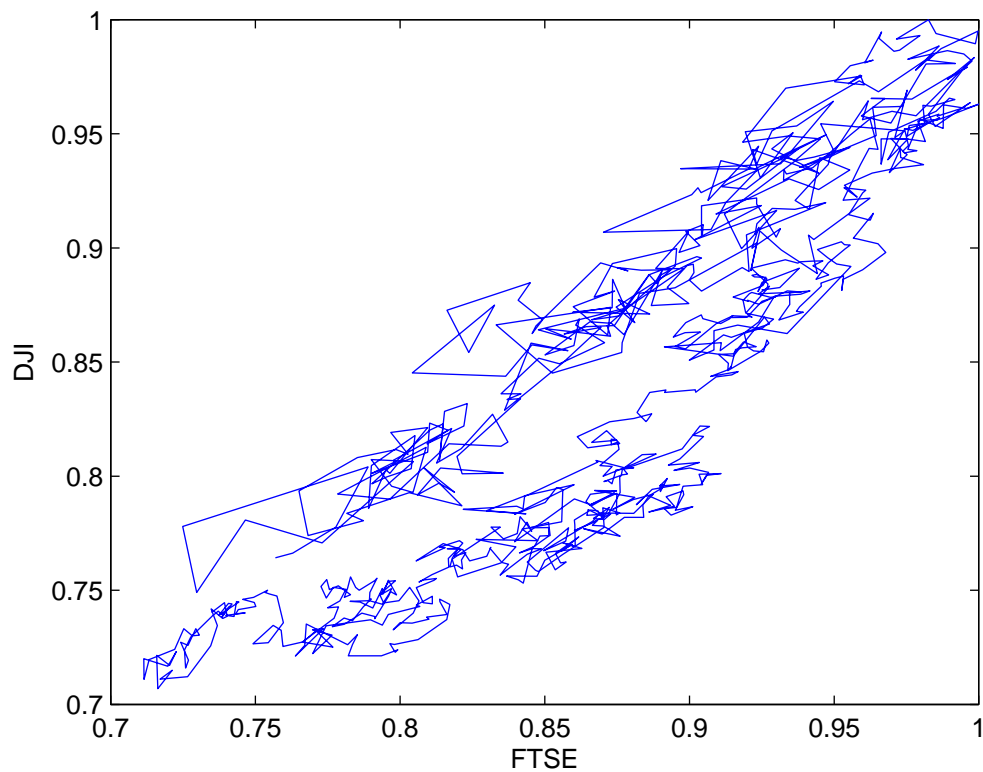


Figura-24 Plano de Fase FTSE x DJI

Observando a Figura 24, é possível perceber uma maior simetria quando comparada com as Figuras 21 ou 22. Isso mostra a natureza desenvolvida desses mercados. As respostas de um índice com relação ao outro são mais suaves e proporcionais.

As Figuras 25 e 26 novamente apresentam um mercado emergente, Brasil (Presa), e um mercado desenvolvido, Inglaterra (Predador), de modo que é esperada um comportamento menos suave e desproporcional de respostas a movimentações dos índices.

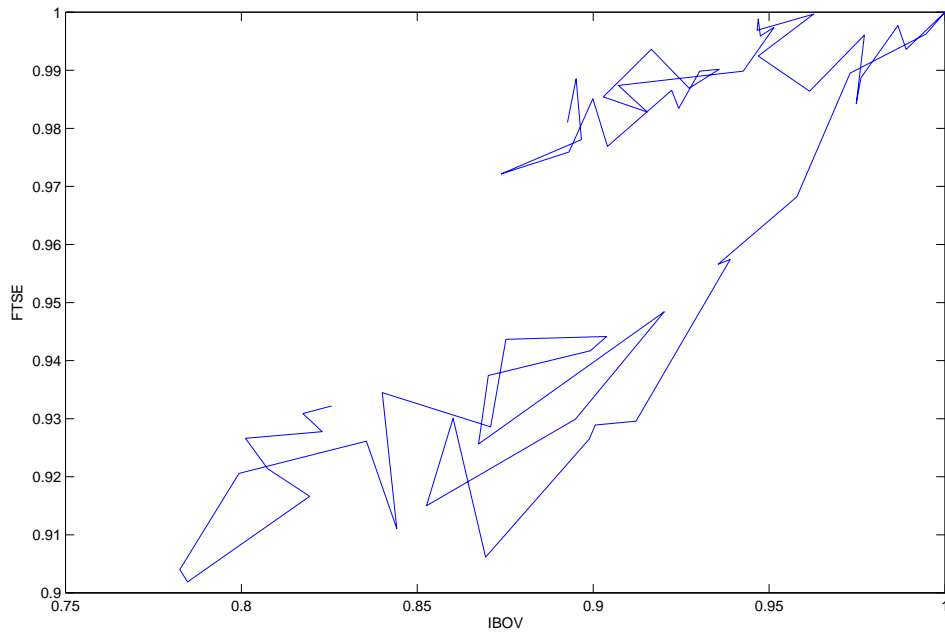


Figura-25 Plano de Fase IBOV x FTSE

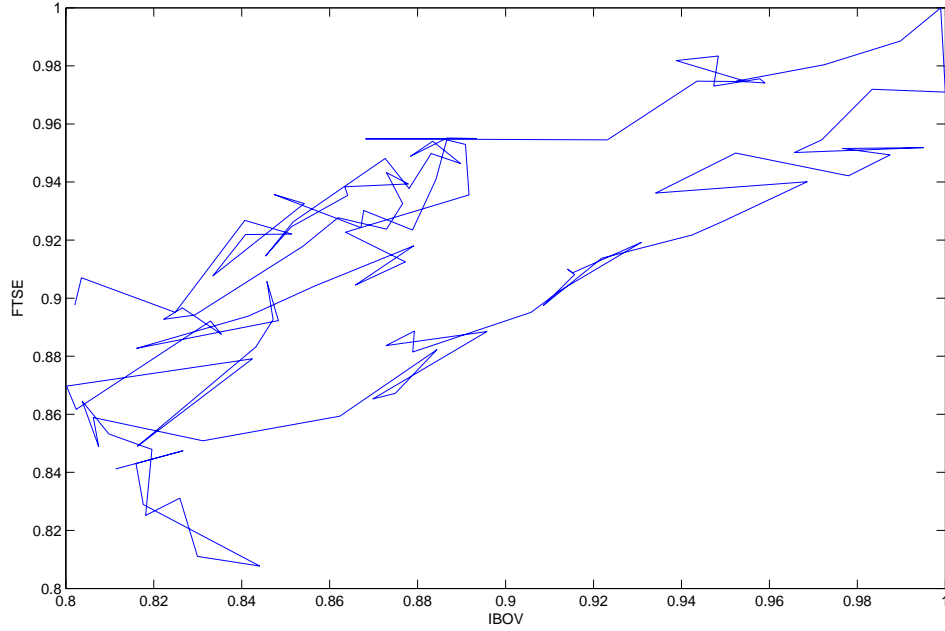


Figura-26 Plano de Fase IBOV x FTSE

Como era esperado, existe menos simetria nas Figuras 25 e 26 do que nas Figuras 23 e 24 devido à maturidade dos mercados.

As Figuras 27 e 28 apresentam o espaço de fase para o modelo Presa e Predador, respectivamente, IBOV e NIK.

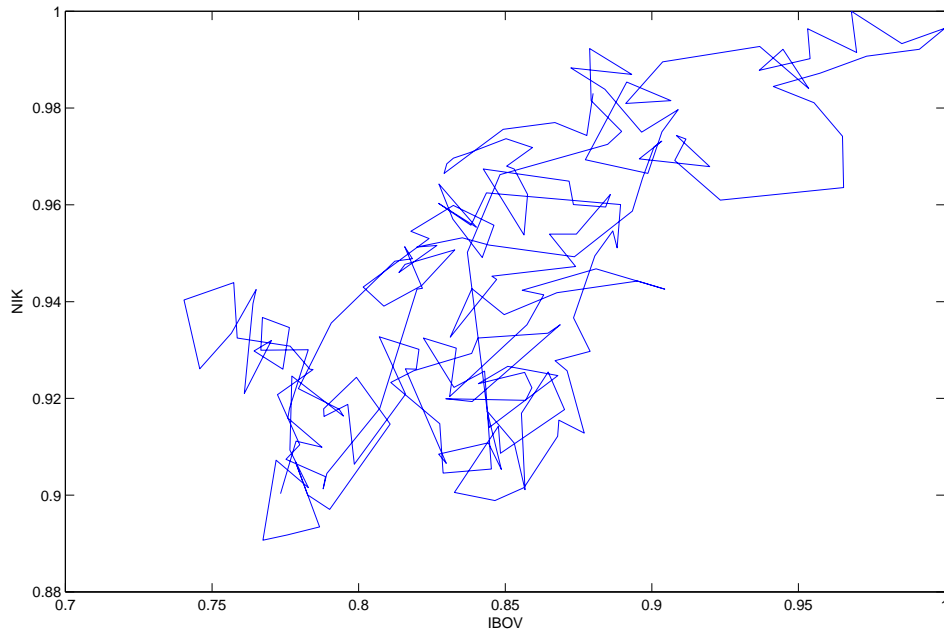


Figura-27 Plano de Fase IBOV x NIK

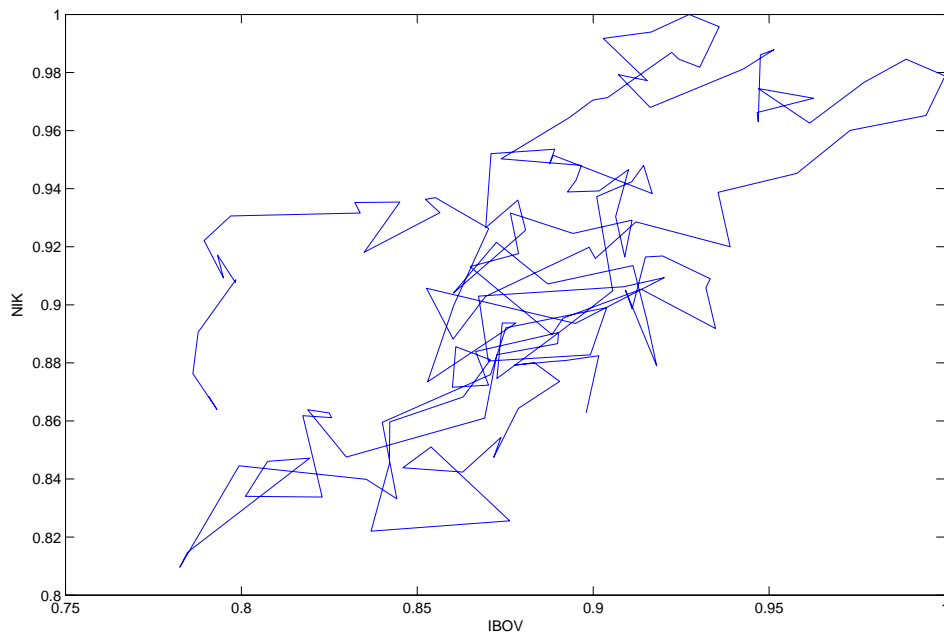


Figura-28 Plano de Fase IBOV x NIK

Mais uma vez o comportamento assimétrico se fez presente. As próximas figuras, Figuras 29-32, consideram o NIK como presa e os índices DJI e FTSE como predadores.

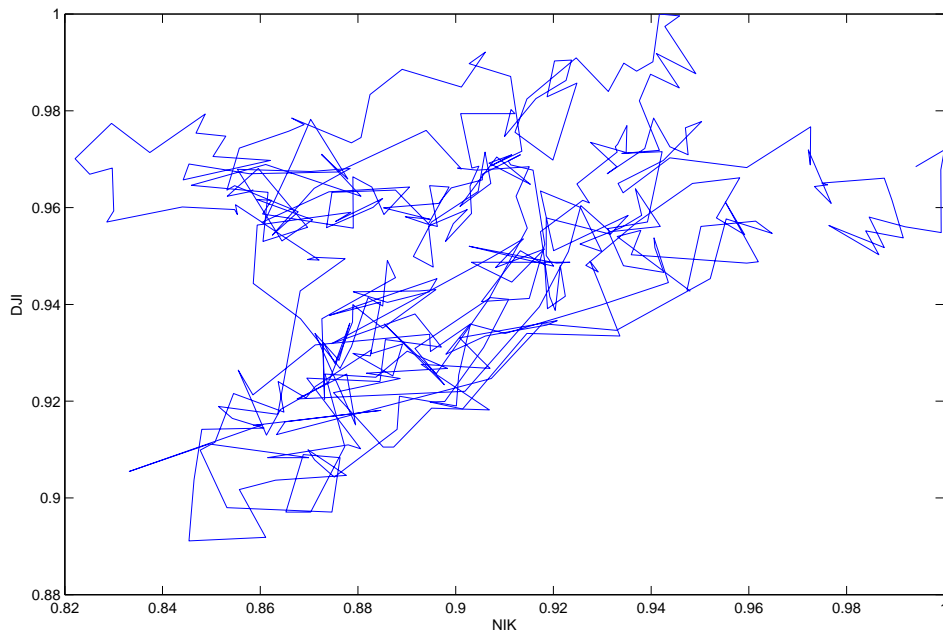


Figura-29 Plano de Fase NIK x DJI

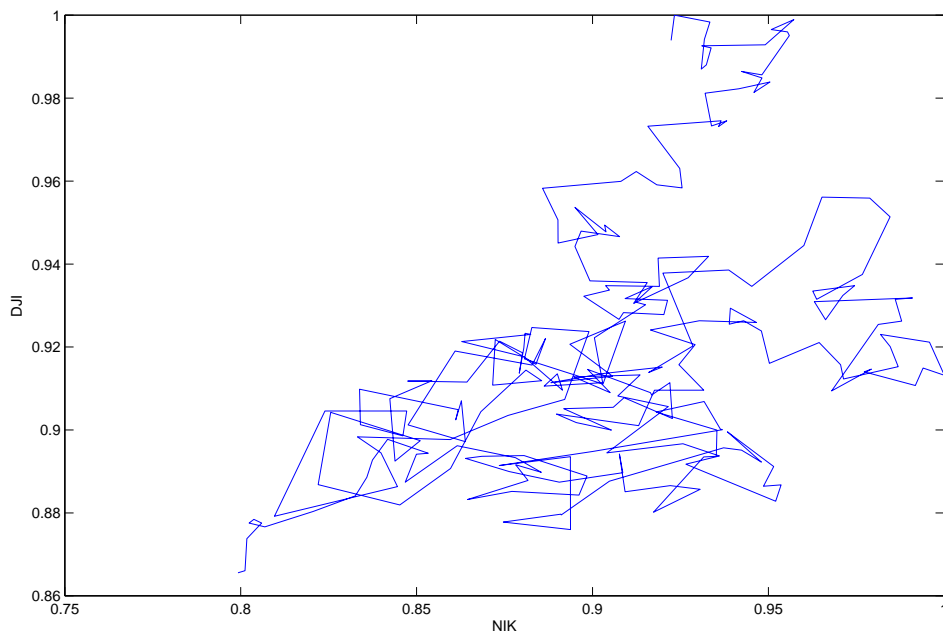


Figura-30 Plano de Fase NIK x DJI

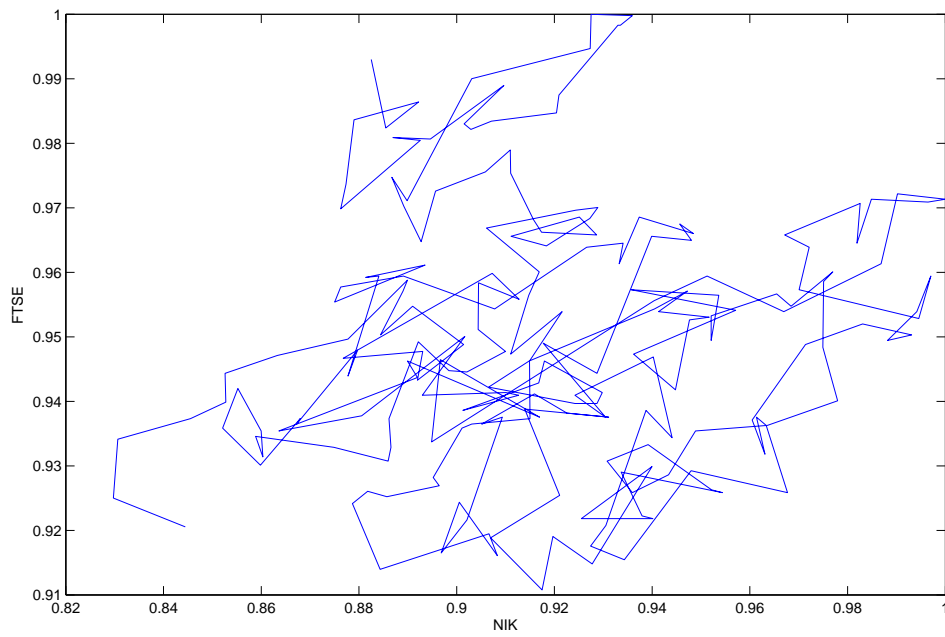


Figura-31 Plano de Fase NIK x FTSE

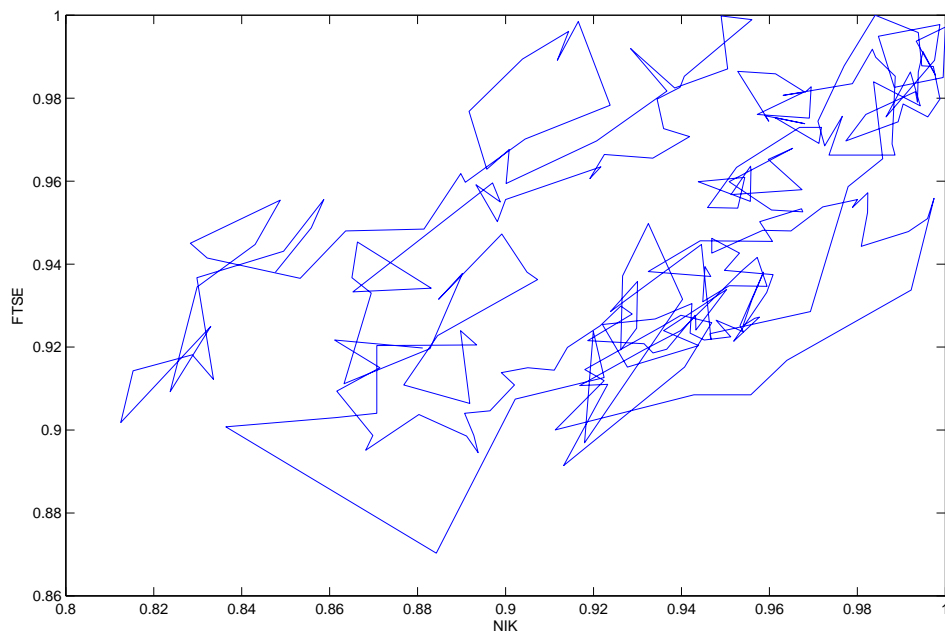


Figura-32 Plano de Fase NIK x FTSE

Dos dados acima apresentados nas Figuras 21-32 foram selecionados aqueles que apresentaram resultados na simulação que eram mais condizentes com aquilo que era esperado.

As Figuras 33-35 exibem as simulações do sistema Presa-Predador. As Figuras 33-35 mostram as simulações para a primeira região (Figura 21) selecionada de IBOV e DJI e exibem, respectivamente, a estimativa dos parâmetros, a simulação contra os dados reais no tempo e a simulação contra os dados reais em plano de fase.

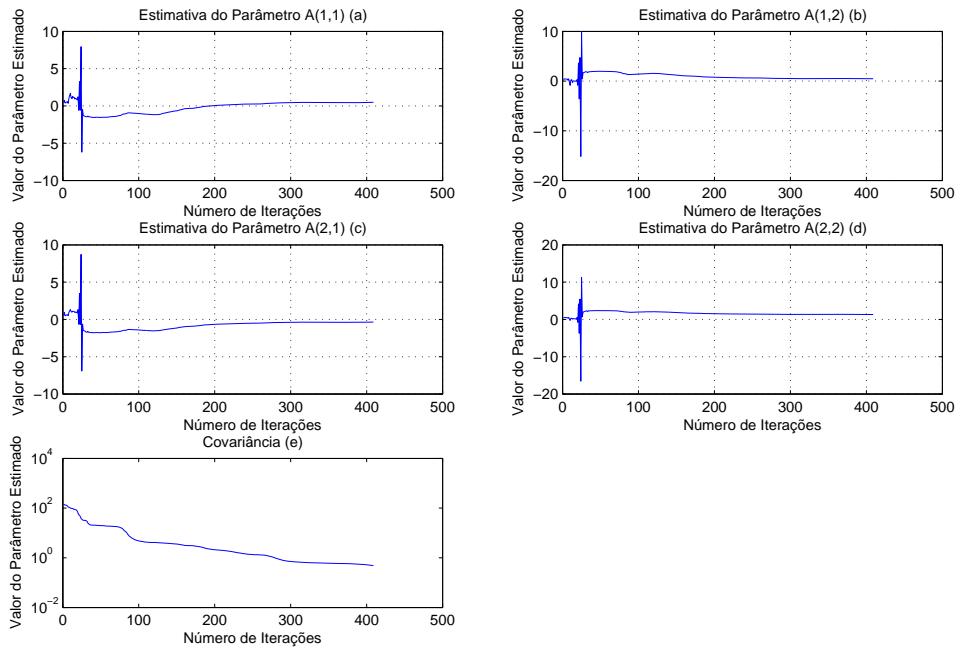


Figura-33 Identificação dos Parâmetros para IBOV e DJI

É possível observar que a covariância tende a zero à medida que o número de iterações aumenta ao mesmo tempo em que as estimativas convergem para valores fixos.

O sinal das estimativas das Figuras 33 (b) e (c) são, respectivamente, positivo e negativo. Seria esperado que o sinal de (b) também fosse negativo para este estar em linha com o modelo Presa-Predador, porém isso não foi observado. Uma explicação para isso pode ser derivada do tempo de simulação, pois os dados fornecidos podem não ter sido suficientes para que o Filtro de Kalman aprendesse com a série de dados.

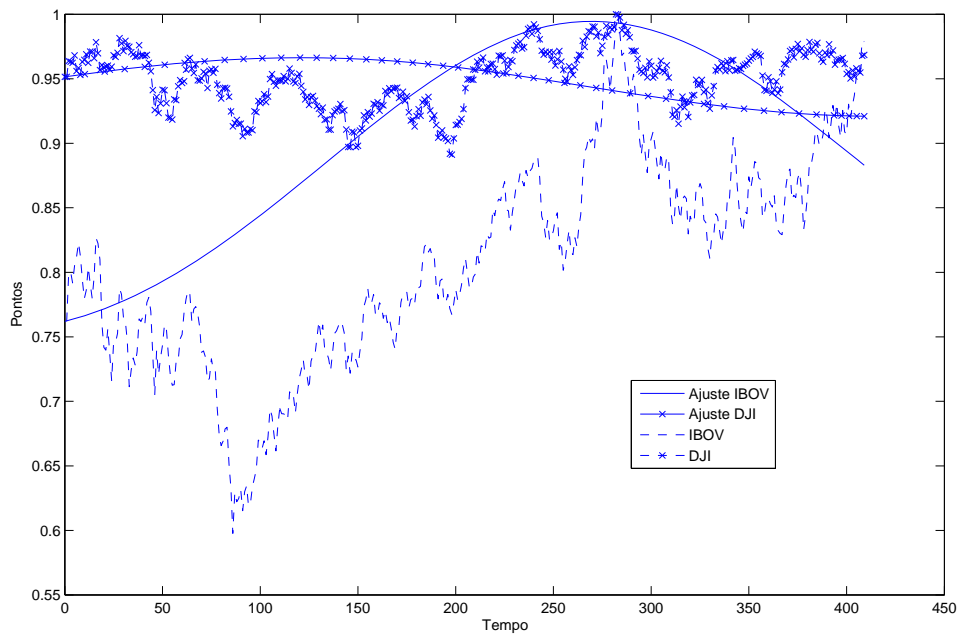


Figura-34 Simulação IBOV e DJI e dados reais

Observando a simulação da Figura 34, nota-se que o ajuste para os dados do DJI é mais próximo dos dados reais do que se comparado com o ajuste dos dados do IBOV para com os dados reais. Por outro lado, embora o ajuste para IBOV não tenha sido tão satisfatório quanto o ajuste do DJI, o ajuste do IBOV respeita os movimentos de alta e baixa quase que em sua totalidade quando observados os dados reais. Quando os dados do IBOV apresentam tendência de alta ou baixa, o ajuste apresenta o mesmo comportamento.

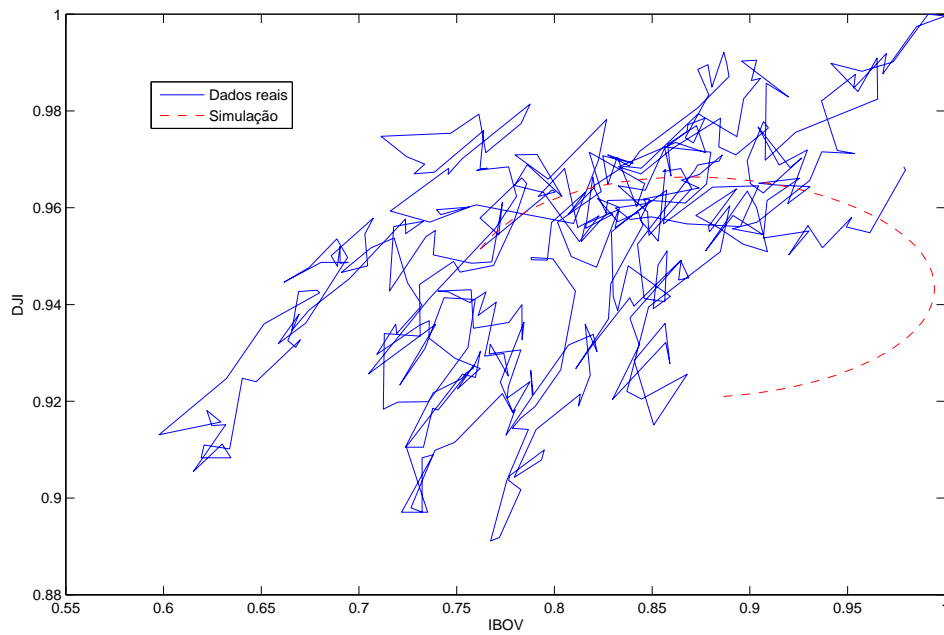


Figura-35 Simulação IBOV e DJI e dados reais em plano de fase

Tendo em vista que a simulação não apresentou um ciclo completo de picos e vales, não foi possível a formação completa da elipse no plano de fase desses dados. Ainda assim, o centro da simulação é próximo ao centro da acumulação dos dados reais e ela não apresentou comportamento explosivo, como era esperado.

As Figuras 36-38 apresentam a mesma seqüência que as das Figuras 33-35, porém, agora são considerados os dados do FTSE e DJI (Figura 24).

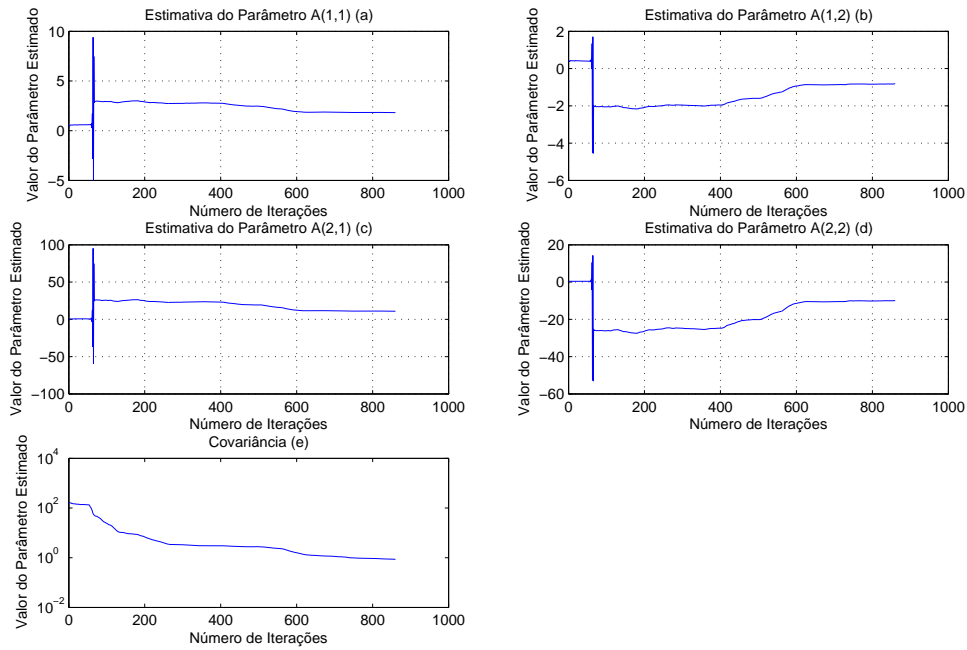


Figura-36 Identificação dos Parâmetros para FTSE e DJI

É possível observar que a covariância tende a zero à medida que o número de iterações aumenta ao mesmo tempo em que as estimativas convergem para valores fixos.

O sinal das estimativas das Figura 36 (b) e (c) são, respectivamente, negativo e positivo. Seria esperado que o sinal de (c) fosse negativo para este estar em linha com o modelo Presa-Predador, porém isso não foi observado. Uma explicação para isso pode ser derivada do tempo de simulação, pois os dados fornecidos podem não ter sido suficientes para que o Filtro de Kalman aprendesse com a série de dados.

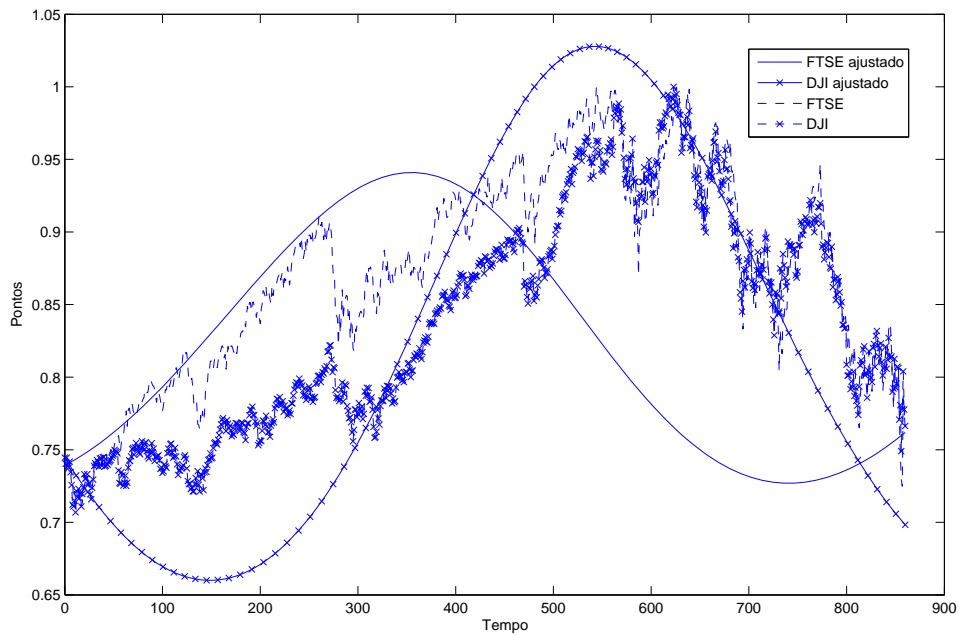


Figura-37 Simulação FTSE e DJI e dados reais

Observando a simulação da Figura 37, nota-se que o ajuste para os dados do DJI é mais próximo dos dados reais, mais uma vez, do que se comparado com o ajuste dos dados do FTSE para com os dados reais. O ajuste para FTSE foi relevante no início da série, porém o movimento oscilatório apresentou uma frequência maior que a dos dados reais. Já no caso do DJI a frequência do ajuste está em linha com aquilo que é observado nos dados reais.

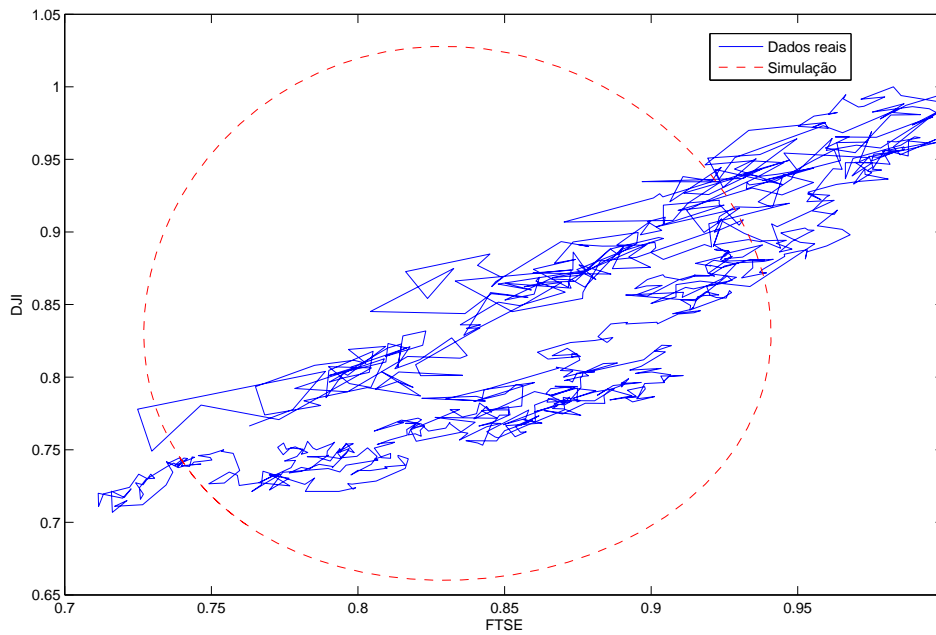


Figura-38 Simulação FTSE e DJI e dados reais em plano de fase

Devido à simulação ter apresentado ciclos completos de picos e vales, foi possível a formação de uma forma quase circular. O centro da simulação é próximo ao centro da acumulação dos dados reais, demonstrando assim uma proximidade de pontos críticos e, por fim, a simulação não apresentou comportamento explosivo, como era esperado.

As três últimas simulações foram feitas a partir dos dados de NIK e DJI presentes na Figura 29. Respectivamente, são apresentadas nas Figuras 39-41 a identificação dos parâmetros do sistema Presa-Predador, a simulação e os dados reais no tempo e a simulação e os dados reais em plano de fase.

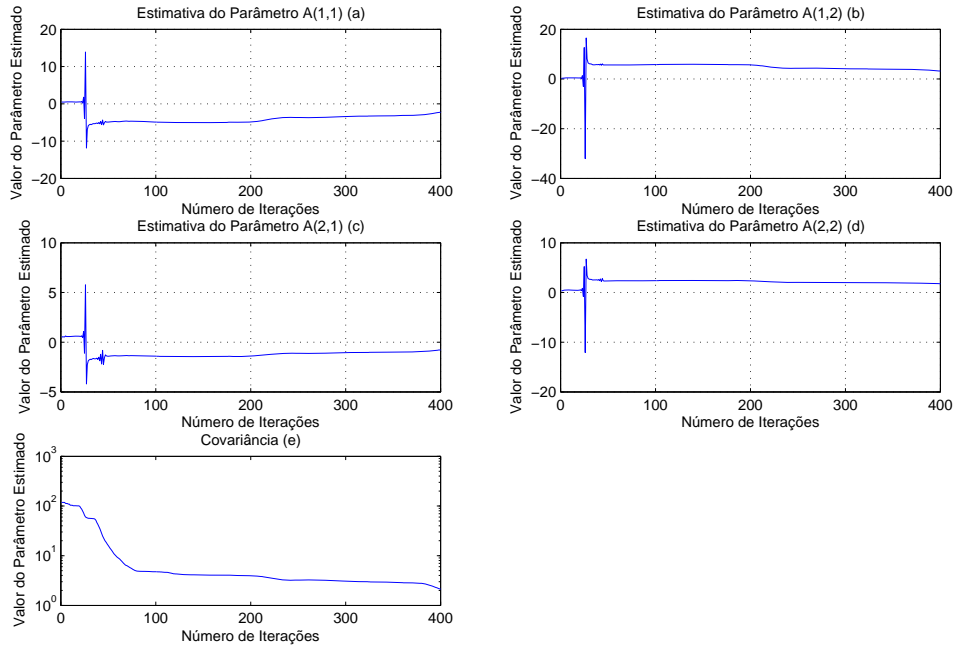


Figura-39 Identificação dos Parâmetros para NIK e DJI

É possível observar que a covariância tende a zero à medida que o número de iterações aumenta ao mesmo tempo em que as estimativas convergem para valores fixos.

O sinal das estimativas das Figuras 39 (b) e (c) são, respectivamente, positivo e negativo. Seria esperado que o sinal de (b) fosse negativo para este estar em linha com o modelo Presa-Predador, porém isso não foi observado. Uma explicação para isso pode ser derivada do tempo de simulação, pois os dados fornecidos podem não ter sido suficientes para que o Filtro de Kalman aprendesse com a série de dados.

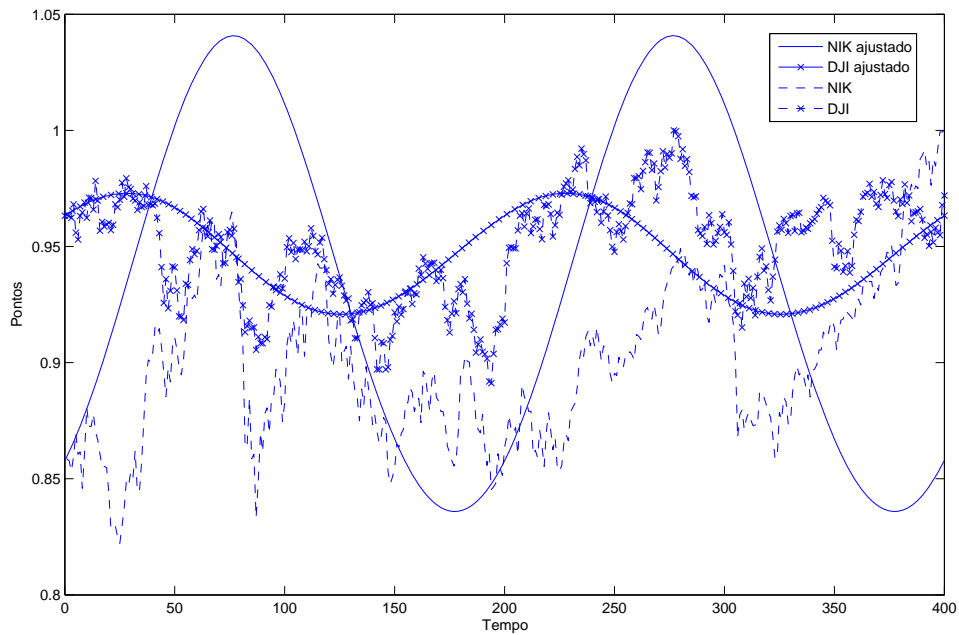


Figura-40 Simulação NIK e DJI e dados reais

Observando a simulação da Figura 40, nota-se que o ajuste para os dados do DJI é mais próximo dos dados reais, como nas duas simulações anteriores, do que se comparado com o ajuste dos dados do NIK para com os dados reais. O ajuste para FTSE tanto quanto para DJI apresentaram freqüências muito parecidas com aquelas observadas nos dados reais, onde picos e vales coincidem em muitas regiões quando observadas suas localizações no tempo.

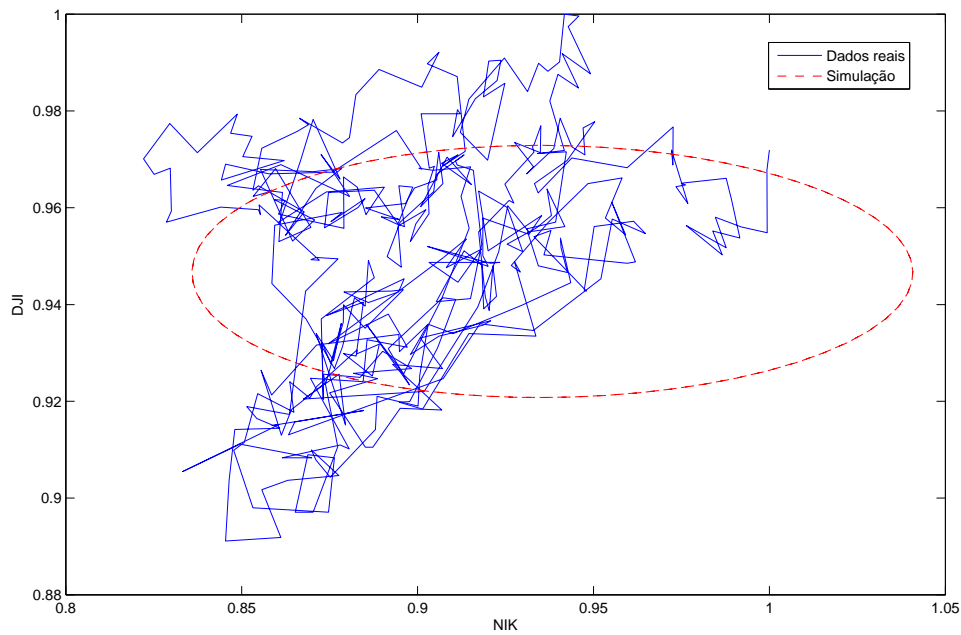


Figura-41 Simulação NIK e DJI e dados reais em plano de fase

Devido à simulação ter apresentado ciclos completos de picos e vales, foi possível a formação de uma forma quase circular. O centro da simulação é próximo ao centro da acumulação dos dados reais, demonstrando assim uma proximidade de pontos críticos e, por fim, a simulação não apresentou comportamento explosivo, como era esperado.

5. Conclusão

Este trabalho buscou a compreensão de sistemas dinâmicos para que fosse realizada a identificação de um sistema de equações, o modelo Presa-Predador, no contexto de índices de ações como populações de presas e predadores. A motivação para isso foi a natureza dos movimentos das bolsas de valores, sendo que umas representam um nível mais maduro do mercado e outras apresentam características de mercados emergentes ou especulativos, como alta volatilidade e coeficientes de correlação maiores do que 1 quando comparados a mercados mais consolidados.

Além disso, para compor o formato característico das curvas do sistema Presa-Predador, também foi pensado no tempo de atraso da informação entre as bolsas e sua interpretação e entendimento do mercado, assim pode ser possível que alguns mercados se antecipem e outros se atrasem.

Foram identificados modelos utilizando dados dos índices DJI, NIKKEI 225 e FTSE, pois estes apresentaram os resultados mais relevantes dentro do escopo deste trabalho. Antes que a identificação fosse possível, o modelo Presa-Predador foi linearizado e discretizado com o método de Runge-Kutta, o qual é mais eficiente do que o método de Euler.

Percebeu-se que o Filtro de Kalman cumpre seu papel na identificação de sistemas mas que os dados utilizados não possibilitaram resultados condizentes com o esperado no quesito dos sinais das estimativas dos parâmetros na diagonal secundária do sistema Presa-Predador. Mesmo assim, foi possível obter ajustes relevantes e alinhados, em algumas regiões do tempo, com o comportamento dos dados reais dos índices estudados.

Um ponto que pode ser estudado em um futuro trabalho que vise o aperfeiçoamento da modelagem dos índices seria a utilização de uma série de dados maior para a identificação do modelo e então usar essas estimativas em cortes desse intervalo. Desse modo o Filtro de Kalman possuirá mais dados para poder aprender com

a série e assim pode ser esperado um melhor ajuste e sinais condizentes com o modelo Presa-Predador. Além disso, como segunda sugestão, poderia ser utilizado o Filtro de Kalman Estendido, este consegue lidar diretamente com equações não lineares e pode trazer melhores estimativas pois não é necessária toda a manipulação intrínseca nos métodos de linearização.

6. Referências

- BISHOP, G., WELCH, G. An Introduction to the Kalman Filter. **Department of Computer Science**. University of North Carolina. Chapel Hill. 2001.
- BLACK, F., SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **The Journal of Political Economy**. v. 81, n. 3. p. 637-654. 1973. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1831029>>. Acesso em: 22/04/2009.
- BLOOMBERG. Bloomberg: cotações de índices. Acesso em: 10/06/2009.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Não Lineares e Estabilidade. In: BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 7ª edição. Rio de Janeiro. Tradução Valéria de Magalhães Iorio. Editora: LTC. 2001. Capítulo: 8, p. 247-294.
- BROCK, W., LAKONISHOK, J., LEBARON, J. Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns. **The Journal of Finance**, v. 47, n. 5. p. 1731-1764. Dezembro de 1992. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2328994>>. Acesso em: 15/06/2009.
- CAETANO, M. A. L., Apostila do Curso de Processos Estocásticos, Unesp, São Paulo. cap. 9-10. 1997.
- CAETANO, M. A. L.; YONEYAMA, T. A financial indicator for mid-term tendencies. **Physica A**, v. 385, n. 2. 2007.
- Disponível em:
<http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6TVG-4NR18C3-5&_user=2762348&_rdoc=1&_fmt=&_orig=search&_sort=d&view=c&_acct=C000058583&_version=1&_urlVersion=0&_userid=2762348&md5=fb41dc59250c508ee48d2121f8b0550e>

- DAMODARAN, A. **Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset**. 2ª Edição. Nova York. Editora: Wiley Finance. 2002. 992 p.
- FAMA, E. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. **The Journal of Finance**. v. 25, n. 2. p. 283-417. Dezembro de 1969. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2325486>>. Acesso em: 15/06/2009.
- GELB, A.; KASPER, J. F.; NASH, R. A.; PRICE, C. F.; SUTHERLAND, A. A. Linear Dynamic Systems. In: GELB, A.; KASPER, J. F.; NASH, R. A.; PRICE, C. F.; SUTHERLAND, A. A. **Optimal Applied Estimation**. 16ª impressão. Massachusetts. Editora: The M.I.T. Press. 1974. Capítulos: 3-4 p. 51-136 e capítulo 8 p. 294-295.
- GRACIA, E. Predator-prey: an efficient market model of financial bubbles and the business cycle Maio de 2004.. Disponível em: <<http://ssrn.com/abstracts=549741>>. Acesso em: 26/05/2009
- HARVEY, A. C. State Space Model and the Kalman Filter. In: HARVEY, A. C. **Forecasting, structural time series models and the Kalman filter**. Cambridge. Editora: Cambridge University Press. 1989. Capítulos: 3-4 p.100-232.
- MANDELBROT, B; HUDSON, R.L. **Mercados Financeiros Fora de Controle: A teoria dos fractais explicando o comportamento dos mercados**, tradução Afonso Celso da Cunha Serra. Editora: Campus, 2004. 336 p.
- MAYBECK, P. S. Introduction. In: MAYBECK, P. S. **Stochastic models, estimation, and control**. Ohio. Academic Press. 1979. v. 1 Capítulo: 1, p.1-15.
- MINARDI, A. M. A. F. Retornos Passados Prevêm Retornos Futuros? **Revista de Administração e Economia – eletrônica**. v. 3, n. 2. Dezembro de 2004. Disponível em: <<http://www.rae.com.br/eletronica/index.cfm?FuseAction=Artigo&ID=1738&Secao=FINANÇAS2&Volume=3&Numero=2&Ano=2004>>. Acesso em: 15/06/2009.
- ROSSER, J. B. On the Complexities of Complex Economic Dynamics. **The Journal of Economic Perspectives**, v. 13, n. 4 p.169-192. Outono 1999. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2647018>> . Acesso em: 26/05/2009

- ROSTAGNO, L. M., SOARES, K. T. C., SOARES, R. O. O Perfil Fundamentalista das Carteiras Vencedoras e Perdedoras na Bovespa no Período de 1995 a 2002. **Brazilian Business Review**. v. 5, n. 3. p. 271-288. Dezembro de 2008.
- SHONE, R. Systems of First Order Differential Equations e Population Models. In: SHONE, R. **Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application**. 2ª edição, Cambridge University Press. 2002. Capítulos: 4 e 14. p. 142-200, p. 604-626.
- SORNETTE, D.; JOHANSEN, A. Significance of Log-Periodic Precursors to Financial Crashes. **Quantitative Finance**. v. 1 p. 452-471, 2001. Disponível em: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=274968

ANEXOS

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS COM ALGORITMOS EM MATLAB

% ALGORITMO PARA OS DADOS IBOV E DJI

```
clc
clear all

global aok;
global bok;
global cok;
global dok;

load ibovdji2.txt;

ibovdji2(:,1)=ibovdji2(:,1)/max(ibovdji2(:,1));
ibovdji2(:,2)=ibovdji2(:,2)/max(ibovdji2(:,2));

A1=0;
A2=0;
A3=0;
A4=0;
tempof=length(ibovdji2)-1;

P=[150 0;0 150];
cov(1)=P(1,1);
for k=1:tempof;
    t(k)=k;
    X(k,1)=ibovdji2(k,1);
    X(k,2)=ibovdji2(k,2);

    ganho=1+[X(k,1) X(k,2)]*P*[X(k,1) X(k,2)]';
    K=P*[X(k,1);X(k,2)]/ganho;
    P=P-K*[X(k,1) X(k,2)]*P;
    A1=A1+K(1,1)*(ibovdji2(k+1,1)-[X(k,1) X(k,2)]*[A1;A2]);
    A2=A2+K(2,1)*(ibovdji2(k+1,1)-[X(k,1) X(k,2)]*[A1;A2]);
    A3=A3+K(1,1)*(ibovdji2(k+1,2)-[X(k,1) X(k,2)]*[A3;A4]);
    A4=A4+K(2,1)*(ibovdji2(k+1,2)-[X(k,1) X(k,2)]*[A3;A4]);

    ad(k)=A1;
    bd(k)=A2;
    cd(k)=A3;
    dd(k)=A4;
    cov(k)=P(1,1);
end

% Identificacao da matriz discreta
% figure(1)
% subplot(321)
% plot(ad)
% subplot(322)
% plot(bd)
% subplot(323)
% plot(cd)
% subplot(324)
% plot(dd)
% subplot(325)
% plot(cov)

AD=[A1 A2;A3 A4]

% identificacao dos parametros do sistema linear
```

```

T=150;
aL=(A1-1)/T;
bL=A2/T;
cL=A3/T;
dL=(A4-1)/T;

AL=[aL bL;cL dL]

%identificacao dos parametros do sistema nao linear
xn=0.6;
yn=0.3;

b=(bL)/xn;
d=cL/yn;
a=aL-(b*yn);
c=+dL-(d*xn);

ANL=[a b;c d]

aok=a;
bok=b;
cok=c;
dok=d;

t0=0;
tf=tempof;
inicial=[ibovdji2(2,1) ibovdji2(2,2)];
options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',[1e-6 1e-6]);
[t,y]=ode45('presapredadormono',[t0 tf],inicial,options);

tempo=1:tf;
figure(2)
plot(ibovdji2(:,1),ibovdji2(:,2))
xlabel('IBOV');
ylabel('DJJ');
figure(3)
plot(t,y(:,1),'-b',t,y(:,2),'-r')
hold on
plot(tempo,ibovdji2(1:tf,1),'-b',tempo,ibovdji2(1:tf,2),'-r')
figure(4)
plot(ibovdji2(1:tf,1),ibovdji2(1:tf,2))
hold on
plot(y(:,1),y(:,2),'-r')

```

% Algoritmo para os dados de FTSE e DJI

```
clc
clear all

global aok;
global bok;
global cok;
global dok;

load ftsedji2.txt;

ftsedji2(:,1)=ftsedji2(:,1)/max(ftsedji2(:,1));
ftsedji2(:,2)=ftsedji2(:,2)/max(ftsedji2(:,2));

A1=0;
A2=0;
A3=0;
A4=0;
tempof=length(ftsedji2)-1;

P=[270 0;0 400];
cov(1)=P(1,1);
for k=1:tempof;
    t(k)=k;
    X(k,1)=ftsedji2(k,1);
    X(k,2)=ftsedji2(k,2);

    ganho=1+[X(k,1) X(k,2)]*P*[X(k,1) X(k,2)]';
    K=P*[X(k,1);X(k,2)]/ganho;
    P=P-K*[X(k,1) X(k,2)]*P;
    A1=A1+K(1,1)*(ftsedji2(k+1,1)-[X(k,1) X(k,2)]*[A1;A2]);
    A2=A2+K(2,1)*(ftsedji2(k+1,1)-[X(k,1) X(k,2)]*[A1;A2]);
    A3=A3+K(1,1)*(ftsedji2(k+1,2)-[X(k,1) X(k,2)]*[A3;A4]);
    A4=A4+K(2,1)*(ftsedji2(k+1,2)-[X(k,1) X(k,2)]*[A3;A4]);

    ad(k)=A1;
    bd(k)=A2;
    cd(k)=A3;
    dd(k)=A4;
    cov(k)=P(1,1);
end

% Identificacao da matriz discreta
figure(1)
subplot(321)
plot(ad)
xlabel('Número de Iterações');
ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Estimativa do Parâmetro A(1,1) (a)');
grid
subplot(322)
plot(bd)
xlabel('Número de Iterações');
ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Estimativa do Parâmetro A(1,2) (b)');
grid
subplot(323)
plot(cd)
```

```

xlabel('Número de Iterações');
ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Estimativa do Parâmetro A(2,1) (c)');
grid
subplot(324)
plot(dd)
xlabel('Número de Iterações');
ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Estimativa do Parâmetro A(2,2) (d)');
grid
subplot(325)
semilogy(cov)
xlabel('Número de Iterações');
ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Covariância (e)');

AD=[A1 A2;A3 A4]

%identificacao dos parametros do sistema linear
T=1000;
aL=(A1-1)/T;
bL=A2/T;
cL=A3/T;
dL=(A4-1)/T;

AL=[aL bL;cL dL]

%identificacao dos parametros do sistema nao linear
xn=0.15;
yn=0.68;

b=(bL)/xn;
d=cL/yn;
a=aL-(b*yn);
c=+dL-(d*xn);

ANL=[a b;c d]

aok=a;
bok=b;
cok=c;
dok=d;

t0=0;
tf=tempof;
inicial=[ftsedji2(2,1) ftsedji2(2,2)];
options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',[1e-6 1e-6]);
[t,y]=ode45('presapredadormono',[t0 tf],inicial,options);

tempo=1:tf;
figure(2)
plot(ftsedji2(:,1),ftsedji2(:,2))
xlabel('FTSE');
ylabel('DJI');
figure(3)
plot(t,y(:,1),'-b',t,y(:,2),'-xb')
hold on

```

```

plot(tempo,ftsedji2(1:tf,1),'-b',tempo,ftsedji2(1:tf,2),'-xb')
xlabel('Tempo');
ylabel('Pontos');
figure(4)
plot(ftsedji2(1:tf,1),ftsedji2(1:tf,2))
hold on
plot(y(:,1),y(:,2),'-r')
xlabel('FTSE');
ylabel('DJI');

```

% Algoritmo para os dados de NIK e DJI

```

clc
clear all

global aok;
global bok;
global cok;
global dok;

load nkdji1.txt;

nikdji(:,1)=nikdji(:,1)/max(nikdji(:,1));
nikdji(:,2)=nikdji(:,2)/max(nikdji(:,2));

A1=0;
A2=0;
A3=0;
A4=0;
tempof=length(nikdji)-1;

P=[211 0;0 211];
cov(1)=P(1,1);
for k=1:tempof;
    t(k)=k;
    X(k,1)=nikdji(k,1);
    X(k,2)=nikdji(k,2);

    ganho=1+[X(k,1) X(k,2)]*P*[X(k,1) X(k,2)];
    K=P*[X(k,1);X(k,2)]/ganho;
    P=P-K*[X(k,1) X(k,2)]*P;
    A1=A1+K(1,1)*(nikdji(k+1,1)-[X(k,1) X(k,2)]*[A1;A2]);
    A2=A2+K(2,1)*(nikdji(k+1,1)-[X(k,1) X(k,2)]*[A1;A2]);
    A3=A3+K(1,1)*(nikdji(k+1,2)-[X(k,1) X(k,2)]*[A3;A4]);
    A4=A4+K(2,1)*(nikdji(k+1,2)-[X(k,1) X(k,2)]*[A3;A4]);

    ad(k)=A1;
    bd(k)=A2;
    cd(k)=A3;
    dd(k)=A4;
    cov(k)=P(1,1);
end

% Identificacao da matriz discreta
figure(1)
subplot(321)
plot(ad)
xlabel('Número de Iterações');

```

```

ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Estimativa do Parâmetro A(1,1) (a)');
grid
subplot(322)
plot(bd)
xlabel('Número de Iterações');
ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Estimativa do Parâmetro A(1,2) (b)');
grid
subplot(323)
plot(cd)
xlabel('Número de Iterações');
ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Estimativa do Parâmetro A(2,1) (c)');
grid
subplot(324)
plot(dd)
xlabel('Número de Iterações');
ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Estimativa do Parâmetro A(2,2) (d)');
grid
subplot(325)
semilogy(cov)
xlabel('Número de Iterações');
ylabel('Valor do Parâmetro Estimado');
title('Covariância (e)');

```

```
AD=[A1 A2;A3 A4]
```

```
%identificacao dos parametros do sistema linear
```

```
T=123;
aL=(A1-1)/T;
bL=A2/T;
cL=A3/T;
dL=(A4-1)/T;
```

```
AL=[aL bL;cL dL]
```

```
%identificacao dos parametros do sistema nao linear
```

```
xn=0.197;
yn=0.747;
```

```
b=(bL)/xn;
d=cL/yn;
a=aL-(b*yn);
c=+dL-(d*xn);
```

```
ANL=[a b;c d]
```

```
aok=a;
bok=b;
cok=c;
dok=d;
```

```
t0=0;
tf=tempof;
inicial=[nikdji1(2,1) nikdji1(2,2)];
options=odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',[1e-6 1e-6]);
```

```

[t,y]=ode45('presapredadormono',[t0 tf],inicial,options);

tempo=1:tf;
figure(2)
plot(nikdji(:,1),nikdji(:,2))
xlabel('NIK');
ylabel('DJI');
figure(3)
plot(t,y(:,1),'-b',t,y(:,2),'-xb')
hold on
plot(tempo,nikdji(1:tf,1),'--b',tempo,nikdji(1:tf,2),'--xb')
xlabel('Tempo');
ylabel('Pontos');
figure(4)
plot(nikdji(1:tf,1),nikdji(1:tf,2))
hold on
plot(y(:,1),y(:,2),'-r')
xlabel('NIK');
ylabel('DJI');

```

% Algoritmo para simulação através do método de Runge Kutta do sistema

% Presa-Predador

```
function dx=presapredadormono(t,x);
```

```

global aok;
global bok;
global cok;
global dok;

```

```
dx=[aok*x(1)+bok*x(1)*x(2);cok*x(2)+dok*x(1)*x(2)];
```