

**Insper Instituto de Ensino e Pesquisa
Faculdade de Economia e Administração**

Anna Carolina de Souza Dantas Forbes

**OTIMIZAÇÃO DE INVESTIMENTOS NO CONTROLE DO
AQUECIMENTO GLOBAL**

**São Paulo
2010**

Anna Carolina de Souza Dantas Forbes

Otimização de investimentos no controle do aquecimento global

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas, como requisito para obtenção do grau de Bacharel do Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Orientador:

Prof. Dr. Marco Antonio Leonel Caetano – Insper

**São Paulo
2010**

Forbes, Anna Carolina de Souza Dantas

Otimização de investimentos no controle do aquecimento global / Anna Carolina de Souza Dantas Forbes. – São Paulo: Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, 2010.

47 f.

Monografia: Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Leonel Caetano

1.Otimização 2. Gás Carbônico 3. Aquecimento Global

Anna Carolina de Souza Dantas Forbes

Otimização de investimentos no controle do aquecimento global

Monografia apresentada à Faculdade de Economia do Insper, como parte dos requisitos para conclusão do curso de graduação em Economia.

Aprovado em Junho 2010

EXAMINADORES

Prof. Dr. Marco Antonio Leonel Caetano
Orientador

Prof. Dr. Leonidas Sandoval Junior
Examinador(a)

Prof. Dr. Marcelo Leite de Moura e Silva
Examinador(a)

Agradecimentos

Agradeço ao meu professor orientador, Marco Antonio, por todo o suporte que me deu ao longo dessa monografia, e também pela dedicação que teve comigo no desenvolvimento desse projeto.

Agradeço também a todos aqueles que estiveram ao meu lado durante esse longo e cansativo período, principalmente a você Luiz, que me ajudou nas horas em que eu mais precisei.

Obrigada!

Dedicatória

Dedico essa monografia à minha família, que sempre esteve ao meu lado me apoiando nas horas difíceis, e comemorando comigo nas horas felizes. Sem vocês eu nunca teria chegado onde cheguei.

Resumo

FORBES, Anna Carolina de Souza Dantas. Otimização de investimentos no controle do aquecimento global. São Paulo, 2010. 47p. Monografia – Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

O aquecimento global tem gerado, ao longo dos anos, grande preocupação mundial. Os países têm buscado constantemente realizar acordos para poder reduzir os níveis de gases de efeito estufa na atmosfera. O que não parece ser levantado é o valor dos investimentos a serem realizados, por cada país, para que este atinja seu nível de emissão sustentável. Este trabalho de monografia buscou encontrar soluções ótimas de investimento a medidas que auxiliem no combate ao aquecimento global. Tais soluções foram obtidas através do conceito de modelagens matemáticas, e como resultado, obteve um valor ótimo que deveria ser gasto pelo governo brasileiro para reduzir seus níveis de emissão do gás dióxido de carbono em 40%.

Palavras-chave: Controle ótimo, Simulação, Dióxido de Carbono, Aquecimento Global.

Abstract

FORBES, Anna Carolina de Souza Dantas. Optimization of Investments in the control of global warming. São Paulo, 2010. São Paulo, 2010. 47p. Monograph – Faculdade de Economia e Administração. Insper Instituto de Ensino e Pesquisa.

Global warming has generated, throughout the years, great concern in the world. Countries have constantly pursued deals that aimed reducing green-house gases effects in the atmosphere. What doesn't seem to be measured is the value of the investments that need to be done, by each country individually, in order to lead them to a sustainable level of emissions. This dissertation searched for the optimum investment in measures that would help minimize global warming. These solutions were obtained through the mathematical modeling concept, and as a result, obtained an optimum investment value that should be spent by the Brazilian government in order to reduce its carbon dioxide emission levels in 40%.

Keywords: Optimum control, Simulation, Carbon Dioxide, Global Warming.

Sumário

1 Introdução	10
2 Metodologia	14
3 Análise das variáveis	18
4 Ajuste empírico do modelo	21
5 Análise de sensibilidade do modelo	23
6 Teoria de Otimização Dinâmica	28
7 Regulador Linear Quadrático	30
8 Resultados	33
8.1 Cenário de 1995 a 2005.	33
8.2 Cenário de 2005 a 2015.	36
9 Conclusão	39
Referências.	40
Apêndice.	42

Lista de tabelas

Tabela 1 – Impacto em cenários políticos	11
Tabela 2 – Parâmetros do modelo ajustados à Europa Ocidental	16
Tabela 3 – Parâmetros do modelo ajustados ao Brasil	22

1 Introdução

A economia mundial passou por grandes mudanças com o passar dos anos. Dentre elas, principalmente o fato de terem sido vistas revoluções industriais que trouxeram consigo um grande impacto nos processos produtivos, principalmente através da invenção de máquinas que agilizaram cada vez mais a produção. Porém, o aumento constante do número de fábricas, aliado à necessidade de produzir cada vez mais, fez com que houvesse uma maior utilização de energia com o passar dos anos. Esse processo resultou na ampliação da emissão de gases de efeito estufa, nocivos à atmosfera, que se imagina serem responsáveis pelas alterações climáticas no mundo (GORE, 2006).

De acordo com Gore (2006), o problema disso é que o aquecimento global gera inundações, secas e mudanças climáticas cada vez maiores como, por exemplo, o aumento no número anual de furacões. O derretimento das calotas polares aumenta o nível de águas dos oceanos e lagos, fazendo com que ilhas e até mesmo áreas litorâneas, que podem ser habitadas, acabem sendo submersas pela água. Não só isso: o aquecimento de regiões quentes pode acelerar ainda mais a desertificação do local. Outro fator importante é o fato de que a exposição direta da pele ao sol, sem a proteção da camada de ozônio, principal prejudicada pela emissão de gases nocivos, aumenta cada vez mais os índices de incidência de câncer de pele na população mundial. De acordo com o *National Cancer Institute*, de 1975 até 2006, houve um aumento na incidência de câncer de pele de 167,93% nos Estados Unidos.

Tendo isso em vista, é possível afirmar que as discussões acerca de desenvolvimento econômico dos países, recaem constantemente sobre questões ambientais, principalmente sobre o aquecimento global. Em 1997, foi firmado o Protocolo de Kyoto, que tem como objetivo fixar metas aos países que aderirem a ele, para os níveis de emissão de gás carbônico no período de 2008 a 2012, tendo como referência os níveis de emissão de 1990. Hoje, há uma grande expectativa para uma nova política que regularia as mudanças climáticas globais, pós 2012. Tal política seria acordada em Copenhague, em dezembro de 2009, na Conferência de Mudanças Climáticas das Nações Unidas. Esperava-se que em tal reunião fosse acordada uma quantificação de meta global para a emissão de gases de efeito estufa na atmosfera, e que fossem criados mecanismos eficazes, que garantiriam o cumprimento dessas metas.

Porém, devido ao fato de existirem uma gama muito grande de interesses, muitas vezes divergentes entre os países, a conferência, que fora tão aguardada, acabou sem nenhum

acordo, apenas com um compromisso de uma nova conferência, a ser realizado no México, em dezembro de 2010.

De acordo com o World Bank (2009), se nenhuma medida for tomada para evitar a emissão de gases de efeito estufa, a temperatura do planeta pode aumentar até 6°C até o final de século. A Tabela 1 mostra dois cenários de política. No primeiro, se estabelece uma política que permite uma concentração de dióxido de carbono 550 partes por milhão, o que acarretaria em um aumento na temperatura de 3°C, e no segundo caso permite-se uma concentração de 450 partes por milhão de dióxido de carbono, o que levaria a um aumento na temperatura de 2°C.

Tabela 1 – Impacto em cenários políticos

Concentração de dióxido de carbono, aumento da temperatura, emissões e demanda de energia					
Concentração de dióxido de carbono (partes por milhão)	Aumento da temperatura	Emissões globais em 2030 (Gigatoneladas)		Demanda global de energia (toneladas equivalentes de óleo)	
		Energia Relacionada ao dióxido de carbono	Total de gases de efeito estufa	2020	2030
550	3°C	33	48	14.360	15.480
450	2°C	26	36	14.280	14.360

Fonte: World Bank, 2009

Em Warrick e Farmer (1990), já havia uma discussão acerca dos efeitos da emissão de gases de efeito estufa com relação à temperatura do planeta e sobre o nível de água dos oceanos. Segundo os autores, a previsão para 2030 é de que a o planeta terá sua temperatura elevada cerca de 1 a 2°C, dos níveis de 1990, o que se mostra semelhante às estatísticas do World Bank (2009). Além disso, chegaram à conclusão de que os níveis dos oceanos subiriam de 17 a 26 centímetros em 2030, com relação ao ano do estudo.

Antes mesmo de ser firmado o Protocolo de Kyoto, Grubb (1990) discutiu sobre a possibilidade dos países acordarem a respeito dos níveis de emissão de dióxido de carbono. O autor tenta observar que as chances dos países limitarem suas emissões do gás são muito baixas, uma vez que se trata de um contexto em que países de terceiro mundo estão se industrializando mais rápido do que nunca. Porém, o país que possui a maior economia do mundo e que mais emite gases nocivos, os Estados Unidos, ainda se recusa a participar de tal acordo. Isso se mostra contrário ao argumento do autor, uma vez que tal país não está passando por um processo de industrialização. Aliado a isso, cabe ressaltar que tal acordo já foi aderido, até hoje, por 184 países¹.

¹ De acordo com o site do *United Nations Framework Convention on Climate Change*.

Rosa e Schaeffer (1995) propõem um índice, o *global warming potential index* (GWP) para, desta forma, comparar os o efeito na atmosfera provocado por diferentes gases nocivos. Dessa maneira, utilizando as hidrelétricas brasileiras como base de estudo, chegam à conclusão de que tais fontes de energia contribuem muito menos ao longo do tempo para o efeito estufa do que o processo de geração de energia por meio de combustíveis fósseis.

Nesse mesmo contexto, Fankhauser e Kverndokk (1996) analisam os incentivos e benefícios para a cooperação na redução de emissão de gás carbônico. Os autores utilizam para o estudo um jogo estático, relativo à teoria de jogos, e encontram, assim, tanto o equilíbrio de Nash, quanto o ótimo social para tal cooperação. A simulação dos mesmos chega à conclusão de que haveria uma redução das emissões ótimas, se houvesse cooperação dos países, de 2% para 15% mundialmente, no ano de 2000. Porém, de acordo com o CDIAC (2009), a emissão de CO₂ no mundo aumentou 3,45% de 1996 até 2000.

Seguindo essa linha de fazer previsões acerca das emissões de gases de efeito estufa, essa monografia se baseará principalmente em Caetano *et al.* (2008), e Caetano *et al.* (2009). Ambos os artigos se baseiam em um modelo matemático que utiliza níveis de emissão de CO₂, o Produto Interno Bruto do país e a área florestal do mesmo. Com isso, simulam numericamente um modelo matemático e obtêm níveis ótimos para medidas que combatem o aquecimento global. O nível ótimo de tais variáveis de controle é definido como aquele que minimiza os custos de se chegar a certo nível de emissão de CO₂.

Em Caetano *et al.* (2009), essa otimização é feita com base em um nível esperado de emissão do gás, o que também será feito neste trabalho de monografia. A diferença deste trabalho para os outros dois citados será a definição de um valor monetário para as variáveis que minimizam os níveis de gás carbônico, tendo em vista um alvo pré-definido. Dessa maneira, foi possível definir um valor em unidades monetárias para o investimento ótimo.

Sendo assim, este estudo foi realizado com o intuito de aplicar conceitos de modelagem matemática como forma de ampliar o conhecimento acadêmico com relação a processos que demandem otimização dinâmica, aplicando tais teorias ao problema do aquecimento global. Foi, também, adquirido conhecimento em como chegar a determinadas condições finais das variáveis, e dessa maneira, foi possível definir uma meta para as emissões de CO₂. Tal análise pode ser de extrema relevância, por exemplo, para aqueles países que aderiram ao Protocolo de Kyoto, uma vez que, sabendo onde se encontram hoje os seus níveis de emissão, podem observar exatamente qual o esforço necessário para se chegar aos níveis estipulados para o período de 2008 a 2012.

Além disso, foram aplicados os conceitos e métodos de programação através do ambiente de programação *Matlab*, aliando a isso problemas que contêm dados reais. Com um ajuste de parâmetros aos dados reais, foi encontrado um modelo que se aproximou o máximo possível da realidade. Dessa maneira, foram simulados cenários compatíveis com dados reais, que facilitaram a previsão dos valores das variáveis em questão.

Através do aprimoramento e da obtenção do conhecimento citado, o atual trabalho teve como objetivo buscar soluções ótimas para o investimento necessário que um governo deve fazer, utilizando-se de medidas que auxiliem no combate ao aquecimento global. Tais medidas podem ser traduzidas na forma de idealizações de planos periódicos, que têm em vista a redução do aquecimento global. Em tais planos, podem constar leis de incentivos, por exemplo, com abatimento de impostos, que podem gerar estímulos à produção de materiais biodegradáveis, a utilização de equipamentos que utilizem fontes de energia alternativas, como a solar, e também estímulos ao reflorestamento. Os resultados obtidos mostram que, se o governo quisesse reduzir a emissão de CO₂ em 40%, seria necessário investir um valor que representa 0,1% do PIB nominal do Brasil de 2005.

Esse trabalho de monografia está segmentado da seguinte forma: na seção 2, será apresentada a metodologia utilizada, mostrando como foi feita a obtenção de dados e o modelo utilizado. A seção 3 contém a análise dos dados obtidos na seção anterior, enquanto a seção 4 faz o ajuste empírico do modelo e a seção 5 a análise de sensibilidade do mesmo. Entrando na teoria de otimização, a seção 6 faz uma breve introdução ao assunto, mostrando seus conceitos relevantes, e a seção 7 descreve como tal teoria foi utilizada para o problema de otimização de investimentos no controle do aquecimento global. A seção 8 apresenta os resultados obtidos em dois cenários: de 1995 até 2005, e de 2005 até 2015. Por fim, a seção 9 possui a conclusão desta monografia.

2 Metodologia

Primeiramente, foi realizada a obtenção dos dados reais do país que foi analisado, tais como a emissão de gás carbônico na atmosfera do país, sua área florestal e seu Produto Interno Bruto (PIB) nominal, ou seja, sem descontar a inflação. O país escolhido para o estudo é o Brasil, uma vez que aqui se encontra a maior floresta tropical do mundo, que neste trabalho terá grande impacto na variável relacionada à área florestal. Além disso, o tamanho da floresta gera também um grande impacto na diminuição dos níveis de dióxido de carbono.

Os dados relativos à emissão de CO₂ na atmosfera foram obtidos no site do CDIAC, *Carbon Dioxide Information Analysis Center*. Os dados referentes à área florestal foram obtidos no site do *World Bank*. Finalmente, os dados referentes ao PIB nominal foram obtidos no site do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada, Ipeadata.

É importante ressaltar que o período desses dados foi de 1995 até 2005. Isso porque, como o estudo será relativo ao Brasil, é importante considerar o ano de início do Plano Real, moeda vigente no país até hoje, ou seja, 1995. O que pode acontecer é que utilizar dados anteriores a tal data pode prejudicar a análise dos dados referentes ao PIB, que possuirão uma grande diferença quantitativa de um ano para o outro.

Uma vez obtidos os dados, foi realizada a simulação do modelo, através da função *ode45*, do ambiente de programação *Matlab*. Em Caetano *et al.*(2008), foi desenvolvido o modelo que foi utilizado aqui para o estudo em questão. Trata-se de um sistema com três variáveis, como definido a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{s}\right) - \alpha_1 z + (\alpha_2 - u_2)y \\ \dot{z} = u_1 y - hz \\ \dot{y} = \gamma y \end{cases} \quad (1)$$

Neste sistema, x representa a emissão de gás carbônico na atmosfera, z representa a área florestal e, por sua vez, y representa o PIB nominal do país. A notação “ponto” representa a derivada da variável em questão com relação ao tempo. Por sua vez, $r, s, \alpha_1, \alpha_2, u_1, u_2, h$ e γ são parâmetros do modelo, sendo que r indica a taxa de emissão de dióxido de carbono, s o nível de saturação atmosférica, α_1 a proporção de gás carbônico

retirado da atmosfera por área, α_2 a porcentagem do PIB que se converte em aumento de emissão de CO₂, h refere-se à taxa de desmatamento da floresta e γ a taxa de crescimento do PIB. Finalmente, u_1 e u_2 são variáveis de controle referentes à porcentagem do PIB destinada ao reflorestamento e ao desenvolvimento de energias limpas, respectivamente.

A relação entre as variáveis e parâmetros pode ser observada de acordo com o seguinte esquema:

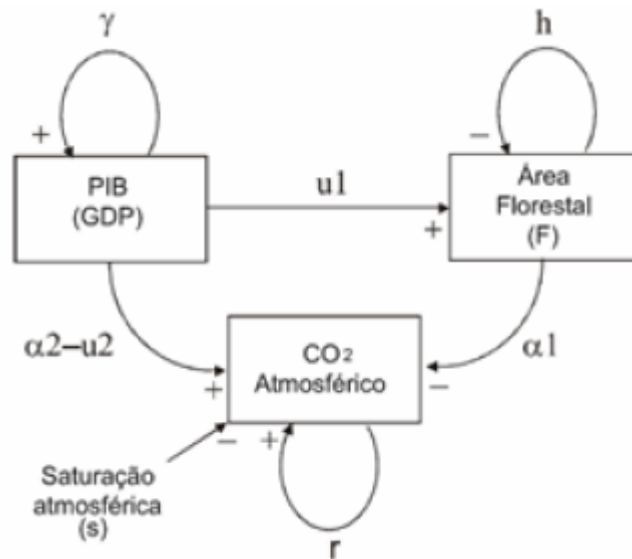


Figura 1 – Relação entre variáveis e parâmetros do modelo.

Fonte: Caetano *et al.* (2009)

As setas representam as ligações entre as variáveis e os parâmetros. A direção das mesmas indica as inter-relações entre elas, que são multiplicadas pelos parâmetros que acompanham as setas. O sinal positivo ou negativo indica como a variável irá influenciar a outra, de forma positiva ou negativamente. Por exemplo, se observarmos a área florestal, percebe-se que tal variável é influenciada negativamente por ela mesma, de acordo com o coeficiente h , é influenciada positivamente pelo PIB com parâmetro de controle u_1 (incentivo ao reflorestamento) e, além disso, influencia a variável CO₂ negativamente, com o parâmetro α_1 .

Após a simulação do modelo, foi necessário identificar os parâmetros descritos acima, e também foram definidas as condições iniciais para a simulação do modelo. Utilizando como exemplo Caetano *et al.*(2008), os parâmetros do modelo para um ajuste relacionado à Europa Ocidental foram:

Tabela 2 – Parâmetros do modelo ajustados à Europa Ocidental

Parâmetro	Valor
r	0.15
s	700
h	0.0001
u ₁	0.00012
u ₂	0.0008
γ	0.035
a	0.1
b	3.5E+9
c	1E+9
α_1	0.0006
α_2	0.00005

Fonte: Caetano *et al.* (2008)

O ano inicial para a simulação foi 1960. Para esses anos, a emissão de CO₂ foi de 398 milhões de toneladas, que é adotado como o valor de $x(0)$. Para $z(0)$, é estimado o valor de 43 milhões de m³, e para o PIB, $y(0)$, foi definido o valor de \$2787 bilhões de dólares. Assim, utilizando tais valores, chega-se, através do ambiente de programação *Matlab*, aos gráficos da Figura 2, que mostram apenas a simulação da evolução das variáveis, sem conter, ainda, a comparação com os dados reais das mesmas.

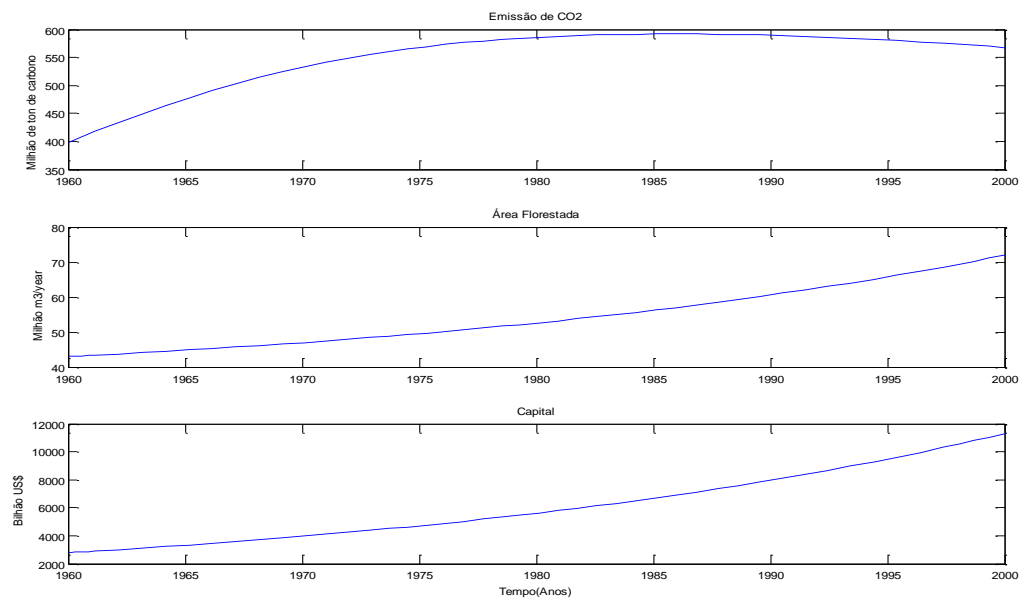


Figura 2 – Simulação das variáveis utilizando o modelo estimado.

Fonte: Matlab

Cabe lembrar que os resultados desta monografia foram diferentes da Figura 2, uma vez que os cenários foram alterados, e o estudo foi baseado no Brasil. Assim, o ajuste do modelo aos dados reais buscou refletir o máximo possível da realidade do país que foi escolhido para este estudo.

Uma vez tendo os parâmetros calibrados aos dados reais, foi realizada a otimização dinâmica do modelo, usando o *Matlab*, com o auxílio da rotina *BVP4C*. Este passo é fundamental para poder encontrar o caminho ótimo das variáveis de controle utilizadas (leia-se u_1 e u_2 , que representam a porcentagem do PIB destinada ao reflorestamento e ao desenvolvimento de energias limpas). Ainda, através desse processo, foi possível satisfazer determinadas condições finais que as variáveis podem representar, ou seja, foram definidas metas para as emissões de CO₂.

Tendo em mãos o nível ótimo das variáveis de controle, definiu-se qual deveria ser o investimento realizado para os mesmos. Ou seja, foi atribuído a tais variáveis um valor monetário tanto para a porcentagem ótima do PIB destinada ao reflorestamento quanto para a porcentagem ótima do PIB que será destinada ao desenvolvimento de energias limpas.

3 Análise das variáveis

As variáveis de estudo, CO₂, área florestal, e PIB nominal que foram obtidas estão representadas na Figura 3, para o Brasil.

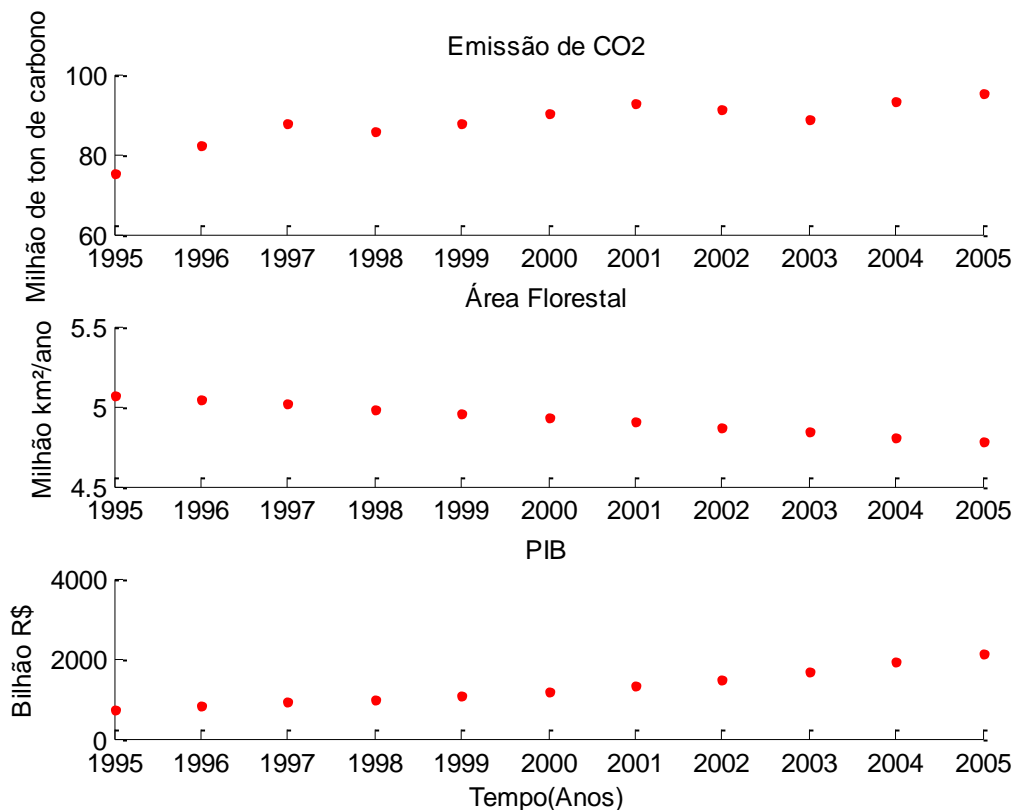


Figura 3 - Dados reais do Brasil
Fonte: CDIAC, World Bank e Ipeadata

Antes de simular o modelo para o Brasil, foram feitas comparações entre as variáveis, duas a duas, para verificar se a relação entre as mesmas é realmente condizente com a realidade. De acordo com a Figura 4, percebe-se que à medida que a área florestal aumenta menor é a emissão de CO₂. Isso é algo real, uma vez que, uma maior quantidade de florestas no país ajuda a reduzir a emissão de gases nocivos na atmosfera. A relação entre as variáveis é, portanto, negativa, como mostra a curva negativamente inclinada, e forte, como mostra uma correlação de -0.8596.

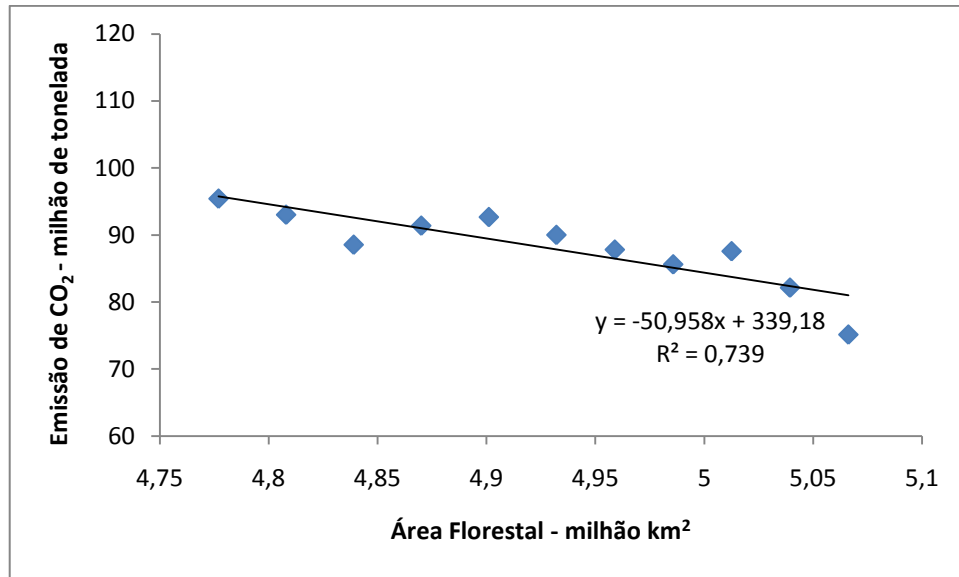


Figura 4 - Relação Área Florestal e Emissão de CO₂

Por sua vez, a relação entre PIB nominal e emissão do gás carbônico também é compatível com a realidade. De acordo com a figura 5, percebe-se que, quanto maior for o PIB, maior é a emissão de CO₂, principalmente devido ao aumento na atividade, e consequentemente, de emissão de gases poluentes pelas fábricas. A relação entre as variáveis é positiva e forte, com correlação de 0.8041.

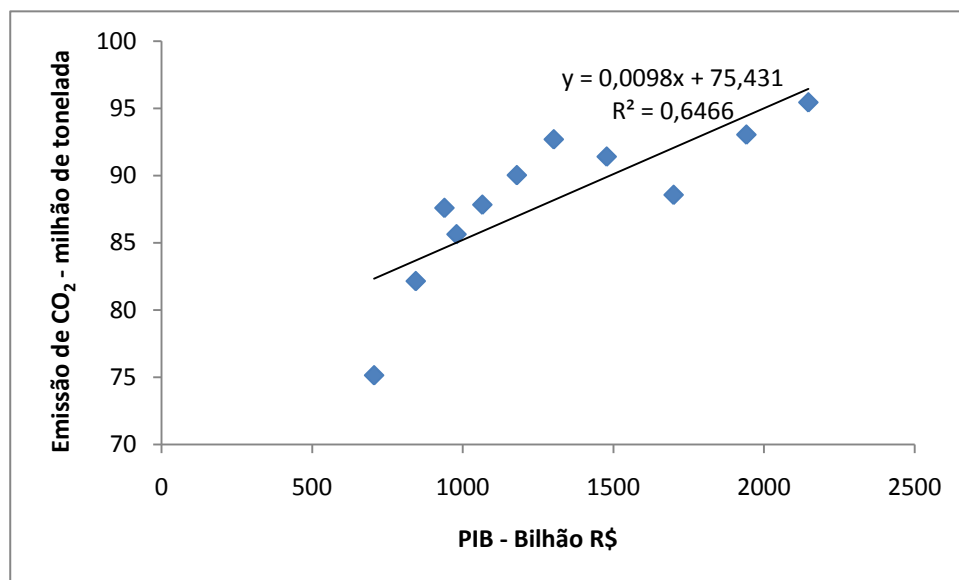


Figura 5 - Relação PIB e Emissão de CO₂

Finalmente, a figura 6 mostra que a relação entre PIB nominal e área florestal é negativa e forte, com coeficiente de correlação de -0.9821, uma vez que, quanto maior o PIB, menos área florestal haverá no país, provavelmente também consequência da maior industrialização e de consumo de fatores produtivos.

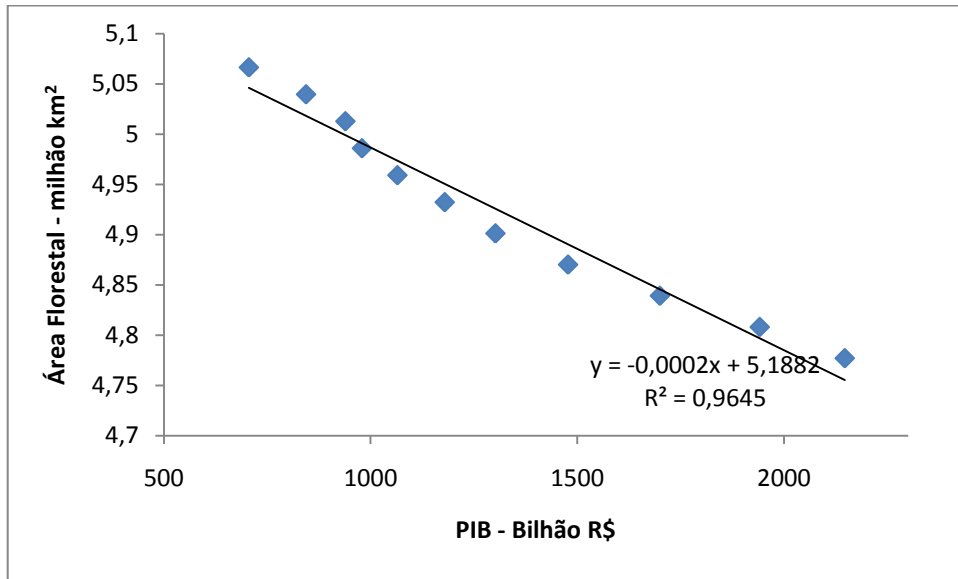


Figura 6 - Relação PIB e Área Florestal

4 Ajuste empírico do modelo

Para que fosse realizado o ajuste do modelo aos dados reais, primeiramente foi feita uma simulação, através da sub-rotina *ode45* do *Matlab*, com os parâmetros utilizados em Caetano *et al.*(2008). Tendo como base o gráfico resultante, o ajuste dos parâmetros foi feito de maneira que o modelo chegasse o mais próximo possível dos dados reais, através de testes em diversas simulações. Ou seja, foram feitas várias simulações, alterando nelas os parâmetros do modelo, de modo que fosse encontrado um modelo que tivesse um baixo erro em comparação aos dados reais.

O resultado disso foi a Figura 7 e os parâmetros ajustados ao modelo encontram-se dispostos na Tabela 3.

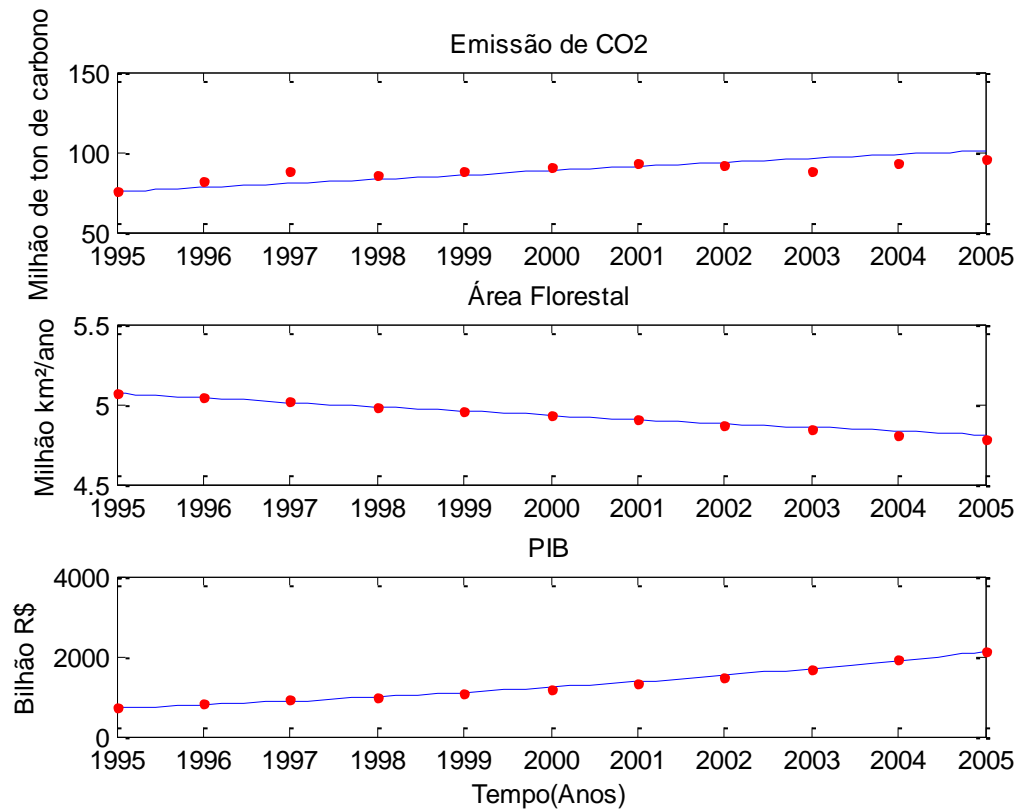


Figura 7 - Simulação do modelo ajustado aos dados reais

Tabela 3 – Parâmetros do modelo ajustados ao Brasil

Parâmetro	Valor
r	0.046
s	1100
h	0.006
u_1	0.000003
u_2	0.001
γ	0.11
α_1	0.0015
α_2	0.0001

5 Análise de sensibilidade do modelo

Com o modelo ajustado, foram feitas simulações de Monte Carlo, com o objetivo de medir a sensibilidade do modelo. Foram adicionados na equação do CO₂, devido a sua maior importância no modelo, dois tipos de ruídos: primeiramente, um ruído aleatório com erro de 1% em relação ao próprio CO₂, e após isso, um ruído de 5%, conforme a seguinte equação:

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{s} \right) - \alpha_1 z + (\alpha_2 - u_2) y + \text{erro} * x * \text{randn} \quad (2)$$

Foram, então, realizadas 30 simulações para cada tipo de ruído (de 1% e de 5%) e, após isso, foram calculados seus erros quadráticos médios e seus erros padrões relativos. Assim, foi possível medir quanto de erro no modelo uma variação aleatória no CO₂ poderia causar.

O resultado das simulações para um erro aleatório de 1% gerou a figura 8. A Figura 9 representa uma síntese dos dados obtidos nas simulações, mostrando o valor máximo que foi gerado, bem como o valor mínimo, em comparação ao valor do dado real, para cada ano. Percebe-se, pelo gráfico, que com 1% de erro, a diferença entre os valores reais e simulados é bem pequena.

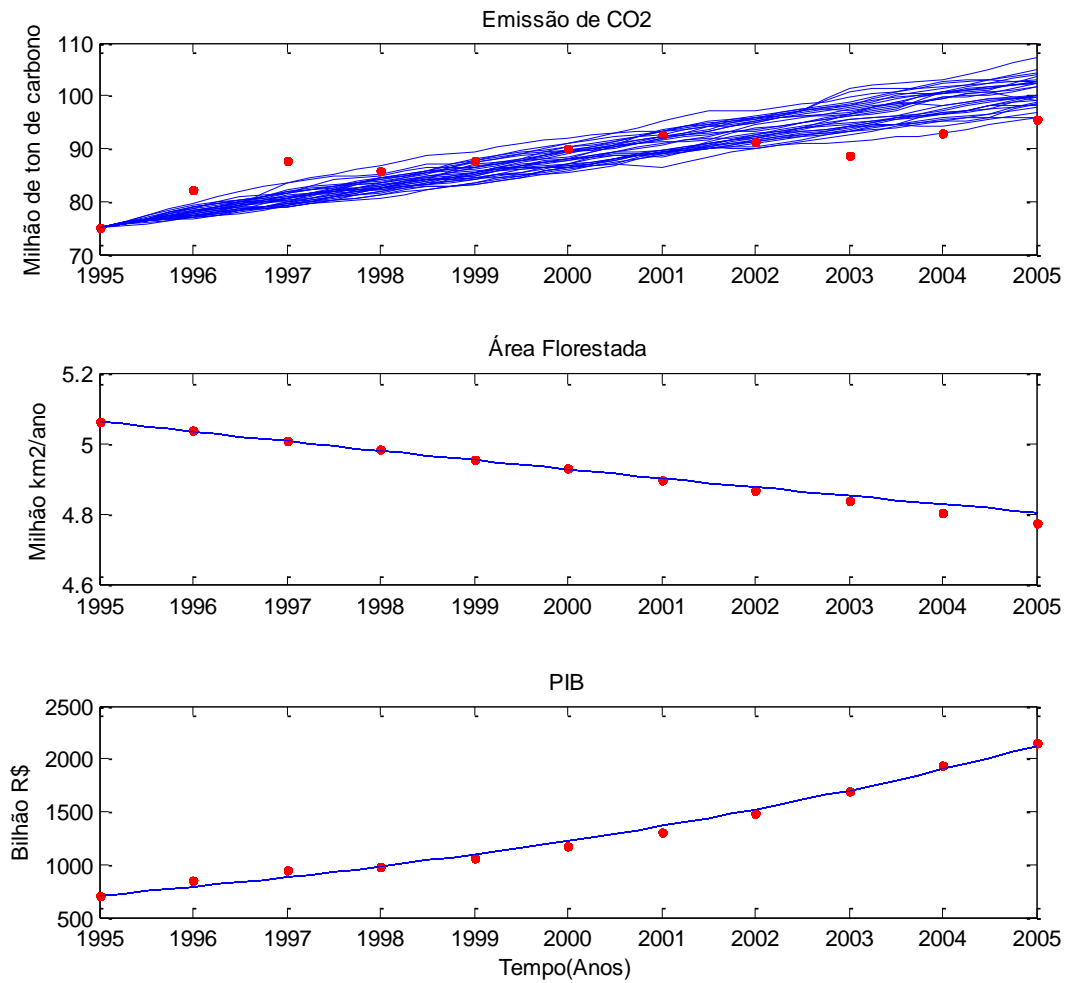


Figura 8 - Simulação de Monte Carlo - Erro de 1%

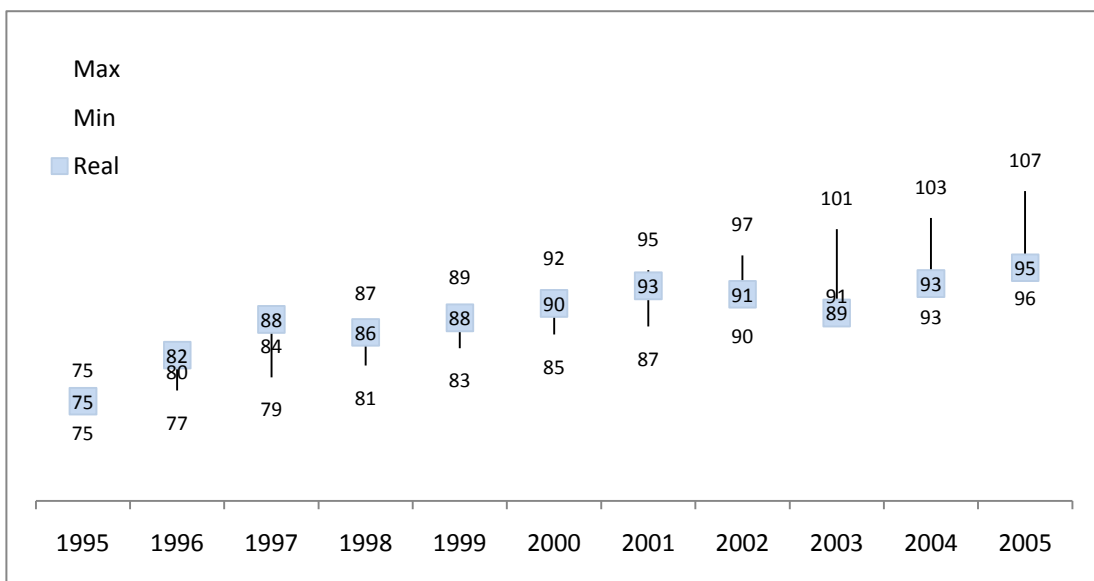


Figura 9 - Valores máximos, mínimos e reais de emissão de CO₂ - Erro de 1%

O erro quadrático médio dos valores de CO₂ obtidos nas simulações foi de 21,90. Cabe ressaltar que tal valor foi obtido através da seguinte fórmula:

$$\frac{\sum_{i=1}^{11} \frac{\sum_{j=1}^{30} (CO_2 \text{ simulado} - CO_2 \text{ real})^2}{30}}{11} \quad (3)$$

Ou seja, para cada ano, foi feita a soma de todos os erros quadráticos, isto é, diferença do dado real com dado simulado, ao quadrado. Após isso, foi tirada uma média desses erros, dividindo-os pelo número de simulações. Para chegar ao erro quadrático médio de todas as simulações, foi feita uma média com os erros quadráticos médios de cada ano (soma de todos, divididos por 11 anos).

A raiz quadrada da média descrita acima representa o erro padrão da simulação. Dividindo tal valor pelo valor médio de emissão de CO₂ (faz-se uma média das médias por ano das 30 simulações), obtém-se o erro padrão relativo.

No caso, o erro padrão relativo foi de 5,3%. Isso significa que o modelo apresenta um erro de apenas 5,3%, se ocorrer um erro aleatório de 1% no cenário de emissão de CO₂. Para verificar se esse erro relativo é realmente baixo, o mesmo processo foi repetido, agora com uma perturbação de 5%.

O resultado também foi satisfatório. A Figura 10 mostra os 30 cenários simulados, e pode-se perceber que, em comparação com a situação anterior, a dispersão das diferentes situações foi realmente maior. Isso pode ser visto ainda mais na Figura 11. Porém, o erro aleatório de 5% no modelo gerou apenas 9,88% de erro padrão relativo, um nível que também é baixo.

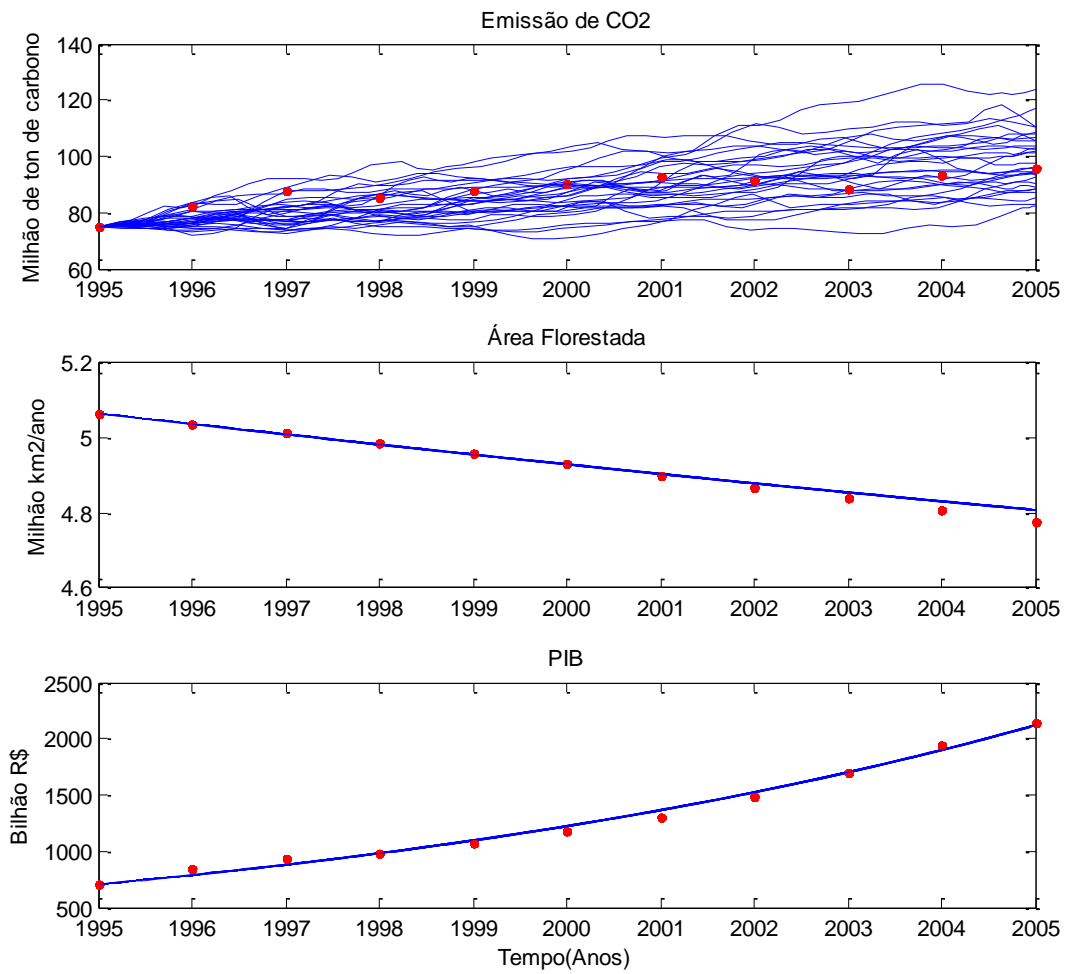


Figura 10 - Simulação de Monte Carlo - Erro de 5%

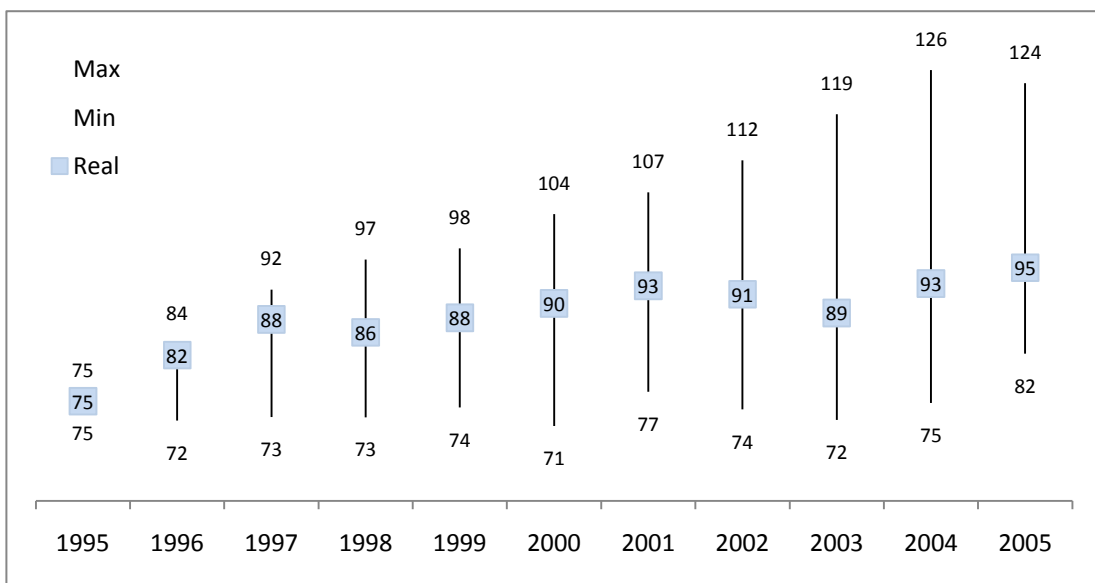


Figura 11 - Valores máximos, mínimos e reais de emissão de CO₂ - Erro de 5%

Conclui-se, então, que uma imprecisão de 1% na estimativa de parâmetros do modelo sobre a variável x, emissão de CO₂, provoca um erro em relação aos dados reais de 5,3% em 11 anos, e, além disso, uma imprecisão de 5% sobre a mesma variável provoca um erro de 9,88%, no mesmo período de tempo.

De acordo com a análise de sensibilidade do modelo, podemos perceber que o modelo se adapta aos dados reais, principalmente pelo fato de que, se ocorrerem fatos aleatórios ao modelo, ele ainda produzirá um erro baixo e, desse modo, fazer projeções tendo como base o modelo estimado não gerará resultados que não sejam condizentes com a realidade.

6 Teoria de Otimização Dinâmica

Após a identificação de um modelo, foi feita uma Otimização em Sistemas Dinâmicos para o sistema que então foi identificado na Equação (1). Isso consiste em, como descrito na metodologia, encontrar um caminho ótimo para que, através das variáveis de controle u_1 e u_2 , no caso, variáveis referentes à porcentagem do PIB destinada ao reflorestamento e ao desenvolvimento de energias limpas, respectivamente, se atinja um patamar específico em um ano que será posteriormente definido.

O método de otimização consiste em, primeiramente, definir qual é, (ou quais são, no caso de um sistema) as equações de estado. Essa equação é justamente aquela para qual se busca fazer o controle ótimo. Além disso, precisa-se definir qual é a condição inicial e qual é a condição final das variáveis, e também qual será a variável de controle. Tal variável é a principal diferença entre a otimização dinâmica e outras formas de otimização, tais como a linear e a não linear. Nos dois últimos casos, ter apenas a equação de estado e as condições iniciais e finais seria suficiente. Porém, como a otimização dinâmica busca não só atingir um ponto ótimo, como também seguir uma trajetória ótima até atingir tal ponto, há a necessidade de se utilizar uma variável de controle.

Após isso, define-se o índice de desempenho (ou índice de performance), aqui chamado de J , que seria a soma de todo o percurso da variável, que pode ser observada através da integral da equação de estado, que contém a variável de estado e a variável de controle, sendo que os tempos iniciais e finais são as condições de contorno do problema.

Existem algumas formas que podem ser adotadas como índice de desempenho. A função pode ser ajustada para se chegar a um tempo mínimo, fixando o tempo final, ou então, tentar minimizar os erros, sendo que a somatória será forçada a buscar a maior proximidade possível com a trajetória de referência. Além disso, ainda pode ser feita uma função que busca minimizar a energia gasta para o trajeto, que pode ser aliada também a uma referência a ser seguida. O problema pode ser de uma função custo não linear, que pode conter senos, cossenos, entre outros, e finalmente, um problema com regulador linear quadrático, quando se deseja regular a variável de estado, a variável de controle e o estado final da variável.

O problema passa então a ser encontrar a melhor variável de controle para encontrar o melhor índice de desempenho. Para isso, define-se que o caminho que utilizará menos energia do sistema dinâmico será aquele em que a *Hamiltoniana* do problema seja constante, ou seja, que a derivada dela em relação à variável de controle será igual a zero, de acordo com o

Princípio de *Pontryaguin. Hamiltoniana* é uma função expandida da função de estado, em que são criados multiplicadores de *Lagrange*, e desse modo, encontra-se o ótimo dessa nova função expandida.

Resumidamente, o processo de otimização dinâmica consiste em, primeiro, definir o índice de performance J , que deverá ser maximizado ou minimizado, tal que:

$$J = h(t_f) + \int_{t_0}^t V(x, u) dt, \quad (4)$$

sujeito à dinâmica:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t). \quad (5)$$

Cria-se, então, a função *Hamiltoniana* (H),

$$H = V(x, u) + \lambda f(x, u, t) \quad (6)$$

e, assim, formulam-se as adjuntas, bem como o controle ótimo:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (7)$$

Além disso, a Hamiltoniana deve satisfazer às condições conhecidas como transversalidades:

$$\frac{\partial h(x^*(t_f), t_f)}{\partial t_f} = \lambda^*(t_f) \text{ e } \frac{\partial h(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} = H(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f). \quad (8)$$

Cabe ressaltar que existem dois tipos de controle do sistema dinâmico. Existem os controladores em malha aberta (open-loop), em que não se restringe o caminho que a variável irá seguir e, portanto, não se consegue corrigir erros no decorrer do percurso se o sistema tiver sido conduzido para a parte instável do plano de fase. O outro tipo de controle é o de malha fechada (closed-loop), que possui sensores ao longo do trajeto da variável, que pode corrigir possíveis desvios no caminho ótimo. No caso deste trabalho, o sistema utilizado foi o último, uma vez que se busca reduzir o máximo possível os desvios no trajeto, já que isso acarretaria em custos a um governo.

7 Regulador Linear Quadrático (LQR)

Para encontrar qual é o caminho ótimo para a emissão de CO₂, utilizando as variáveis de controle u_1 e u_2 , referentes ao reflorestamento e ao desenvolvimento de energias limpas, respectivamente, foi utilizado o método de Regulador Linear Quadrático, assim como em Caetano *et al.* (2008). Este método busca minimizar o custo da emissão atmosférica de CO₂, dado nesta monografia por x , bem como do uso das variáveis de controle, u_1 e u_2 .

Portanto, o índice de performance, medido em R\$, é dado por:

$$J = \frac{(x(t_f) - x_{ref})^2}{2} + \int_0^{t_f} e^{-\delta t} [a(x - x_{ref})^2 + bu_1^2 + cu_2^2] dt \quad (9)$$

sujeito ao estado dado pela equação (1).

As variáveis a , b e c refletem a importância relativa da variável, sendo que a é medida em $\frac{R\$}{Km^2}$, e tanto b quanto c são medidas em $\frac{1}{R\$}$. A variável δ representa um fator de desconto para mudanças climáticas no futuro. Deste modo, $V(x, u) = e^{-\delta t} [a(x - x_{ref})^2 + bu_1^2 + cu_2^2]$

Pode-se perceber, pelo índice de performance, que foi adicionada uma restrição ao modelo, o que força o caminho ótimo da emissão de CO₂ a atingir determinado nível, dado por x_{ref} . Sendo assim, $h(t_f) = \frac{(x(t_f) - x_{ref})^2}{2}$.

Nesta monografia, foram utilizados dois focos para a otimização. Primeiramente, observou-se quanto o governo deveria ter gasto, de 1995 até 2005, para chegar a um nível de emissão de CO₂ de 80 milhões de toneladas, ao invés de 95,441 milhões de toneladas, o que realmente aconteceu. Além disso, utilizando um período de 10 anos, foi calculado quanto o governo deverá gastar, de 2005 a 2015, para chegar a um nível de emissão de CO₂ 40% menor do que os níveis deste ano.

Por isso, as condições iniciais são diferentes em cada abordagem. Ao observar o passado, foram utilizados os valores de 1995 para as condições iniciais das variáveis x , z e y . Para o estudo das variáveis 10 anos à frente, foram utilizados os valores de 2005.

O tempo, t_f , é fixo em 10 anos em ambos os casos. O valor final de x é dado pelo x_{ref} que, no primeiro caso, é 80 milhões de toneladas, e no segundo, 57,26 milhões de toneladas. Além disso, os valores finais de z e y são livres.

Para resolver o problema de controle ótimo, foi construída a *Hamiltoniana* (H):

$$H = e^{-\delta t} [a(x - x_{ref})^2 + bu_1^2 + cu_2^2] + \lambda_x \left(rx \left(1 - \frac{x}{s} \right) - \alpha_1 z + (\alpha_2 - u_2)y \right) + \lambda_z(u_1 y - hz) + \lambda_y \gamma y \quad (10)$$

A partir da *Hamiltoniana*, foram encontradas as variáveis de controle (u_1 e u_2) ótimas, que são dadas por:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \leftrightarrow -\lambda_z y + 2bu_1 e^{-\delta t} = 0 \leftrightarrow u_1^* = \frac{-\lambda_z y}{2be^{-\delta t}} \quad (11)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \leftrightarrow -\lambda_x y + 2cu_2 e^{-\delta t} = 0 \leftrightarrow u_2^* = \frac{-\lambda_x y}{2ce^{-\delta t}} \quad (12)$$

Além disso, as adjuntas são dadas por:

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \leftrightarrow \dot{\lambda}_x = -2a(x - x_{ref})e^{-\delta t} - \lambda_x r + \frac{2\lambda_x r x}{s} \quad (13)$$

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} \leftrightarrow \dot{\lambda}_z = \lambda_x \alpha_1 + \lambda_z h \quad (14)$$

$$\frac{d\lambda_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \leftrightarrow \dot{\lambda}_y = -\lambda_x (\alpha_2 - u_2) - \lambda_z u_1 - \lambda_y \gamma \quad (15)$$

É necessário definir, também, quais são as condições finais das variáveis adjuntas. Tanto $\lambda_z(tf)$ quanto $\lambda_y(tf)$ serão iguais a zero, uma vez que as variáveis de estado z e y são livres. Porém, como a variável de estado x não é livre, pois deve ser igual a um valor de referência, x_{ref} , a condição final de λ_x é dada por:

$$\lambda_x(t_f) = \frac{\partial h(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \leftrightarrow \lambda_x(t_f) = \frac{\partial \left(\frac{(x(t_f) - x_{ref})^2}{2} \right)}{\partial t_f} \leftrightarrow \lambda_x(t_f) = x(t_f) - x_{ref} \quad (16)$$

Tendo em mãos as variáveis de estado, as adjuntas e as variáveis de controle ótimas do modelo de emissão de CO_2 , foi possível resolver o problema de otimização através da rotina `bvp4c.m` do ambiente de programação Matlab. Foi utilizado o Método da Colocação, em que é preciso que o usuário defina valores iniciais para o tipo da função das variáveis de estado e também para as adjuntas. O algoritmo faz, então, com que as variáveis sigam diversas rotas diferentes, para então encontrar aquele ponto que minimiza o erro entre o valor estimado e aquele valor que deveria ocorrer, de acordo com os valores iniciais.

O algoritmo utilizado é composto por um algoritmo principal e três *functions* (APÊNDICE 2). O algoritmo principal, chamado *co2Ot.m*, é responsável por fazer a otimização através da rotina *bvp4c.m* e para isso se utiliza das *functions*, sendo que a *function* *co2M.m* contém os valores que foram encontrados utilizando a Teoria de Controle Ótimo, das variáveis de controle u_1 e u_2 , bem como das variáveis de estado, x , z e y , do índice de performance J , e das adjuntas λ_x , λ_z e λ_y . A *function* *co2Res.m* contém os valores de contorno das variáveis de estado, do índice de performance e das adjuntas e, por sua vez, a *function* *co2Init.m* contém os valores iniciais do tipo das funções das mesmas variáveis que a *function* *co2Res.m*.

Tendo o programa ajustado aos valores encontrados das variáveis em questão, foi preciso encontrar quais são os parâmetros do modelo que otimizam o caminho do índice de performance. Foram então alterados apenas os pesos a , b e c , bem como o fator de desconto δ . Cabe ressaltar que há uma restrição de espaço para reflorestamento, isso porque seria impossível utilizar um espaço para reflorestamento maior do que a própria área do país. Sendo assim, foi necessário colocar, em ambos os cenários, pesos altos para a variável de controle u_1 , ou seja, adotar um peso b bem alto.

8 Resultados

8.1 Cenário de 1995 até 2005

Observado o modelo encontrado pela rotina ode45, foi encontrado o investimento ótimo que deveria ter sido feito, de 1995 até 2005, em reflorestamento e em desenvolvimento de tecnologias limpas, se o governo quisesse ter reduzido a emissão de CO₂ para 80 milhões de toneladas quando, na verdade, ela cresceu para 95,44 milhões de toneladas.

Tendo como valores iniciais aqueles observados em 1995, o caminho ótimo das variáveis de controle é dado pela Figura 12.

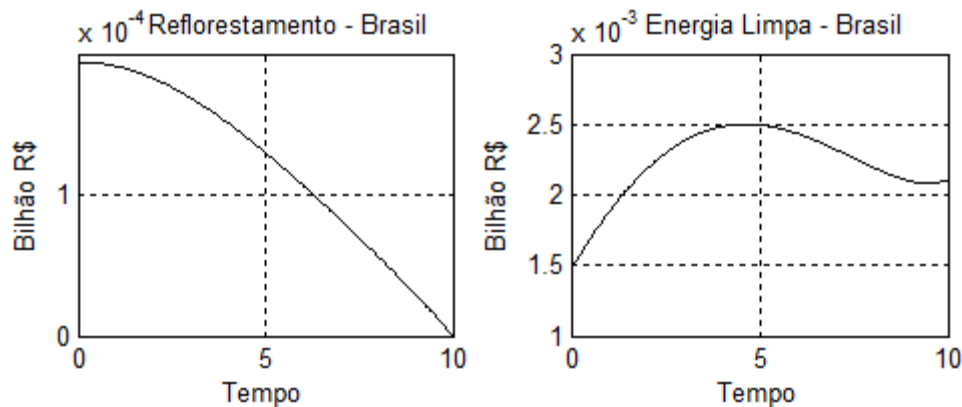


Figura 12 - Variáveis de controle

Traduzindo os caminhos ótimos obtidos para investimentos a cada dois anos, é possível dizer que o governo brasileiro deveria ter gasto, com investimento em reflorestamento, R\$11,43 milhões, de 1995 a 1997, R\$10,12 milhões de 1997 até 1999, R\$7,82 milhões de 1999 até 2001, R\$4,96 milhões de 2001 a 2003 e, finalmente, R\$1,78 milhões de 2003 a 2005, conforme a Figura 13. Isso totalizaria um gasto de R\$36,11 bilhões em investimento.

Percebe-se que o investimento em reflorestamento é alto nos primeiros anos, e decai ao longo do tempo. Isso acontece, provavelmente, pois o investimento não é perdido ao longo do tempo. Ou seja, o que for investido nos primeiros anos não será perdido, e por isso, os investimentos seguintes serão complementares aos iniciais, e não substitutos.

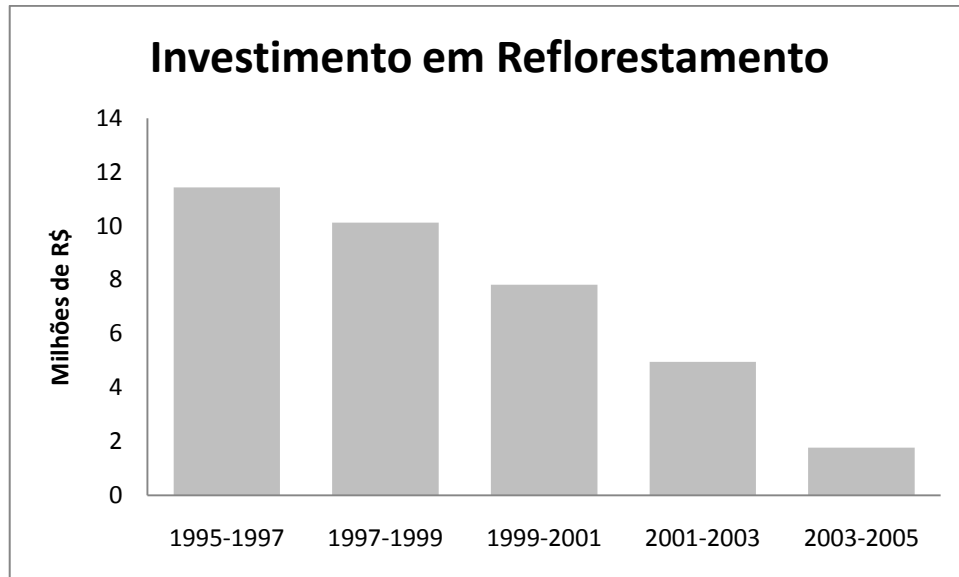


Figura 13 - Investimento em Reflorestamento a cada dois anos

Analogamente, transformando o investimento em desenvolvimento de energia limpa para investimentos a cada dois anos, o governo brasileiro deveria ter gasto R\$11,3 milhões, de 1995 a 1997, R\$142 milhões de 1997 até 1999, R\$149,6 milhões de 1999 até 2001, R\$139,3 milhões de 2001 a 2003 e, finalmente, R\$129,4 milhões de 2003 a 2005, conforme Figura 14. Isso totalizaria um gasto de R\$671,6 milhões em investimento.

Nesse caso, o investimento em desenvolvimento de energia limpa não cai tão bruscamente como acontece com o reflorestamento. Ele cresce no começo, e depois permanece mais ou menos constante. Esse investimento pode ser interpretado como complementar ao reflorestamento, sendo assim, é utilizado um pouco menos quando há grande investimento em reflorestamento, e aumenta conforme o outro cai.

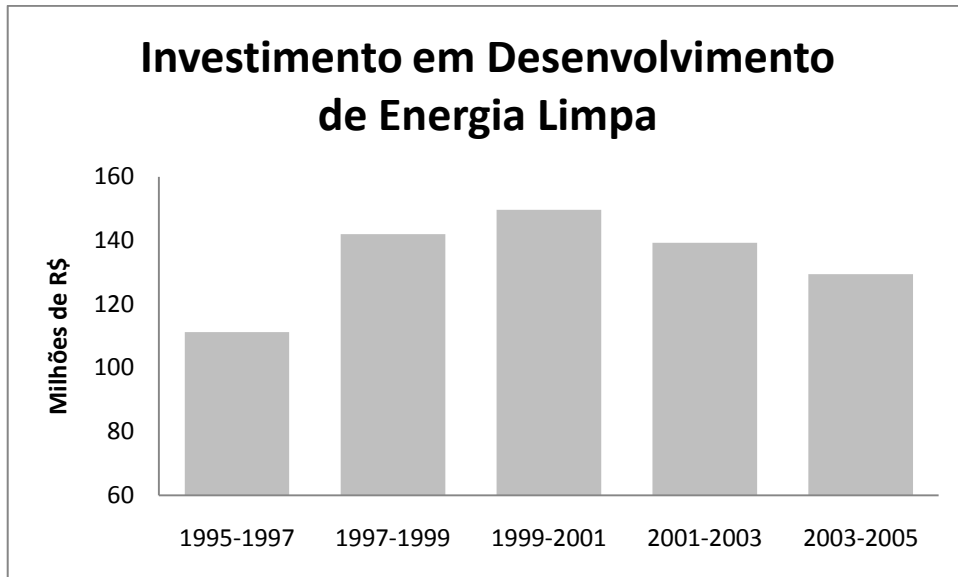


Figura 14 - Investimento em desenvolvimento de energia limpa a cada dois anos

Se o governo tivesse realizado o investimento acima, o Brasil teria alcançado um nível de emissão de 80 milhões de toneladas de CO_2 e sua área florestal seria de 6,05 milhões de Km^2 , valor acima do real, 4,78 milhões de km^2 . Além disso, seu PIB teria alcançado R\$2,12 trilhões, próximo ao valor real, que foi R\$2,147 trilhões. O caminho ótimo das variáveis está representado na Figura 15.

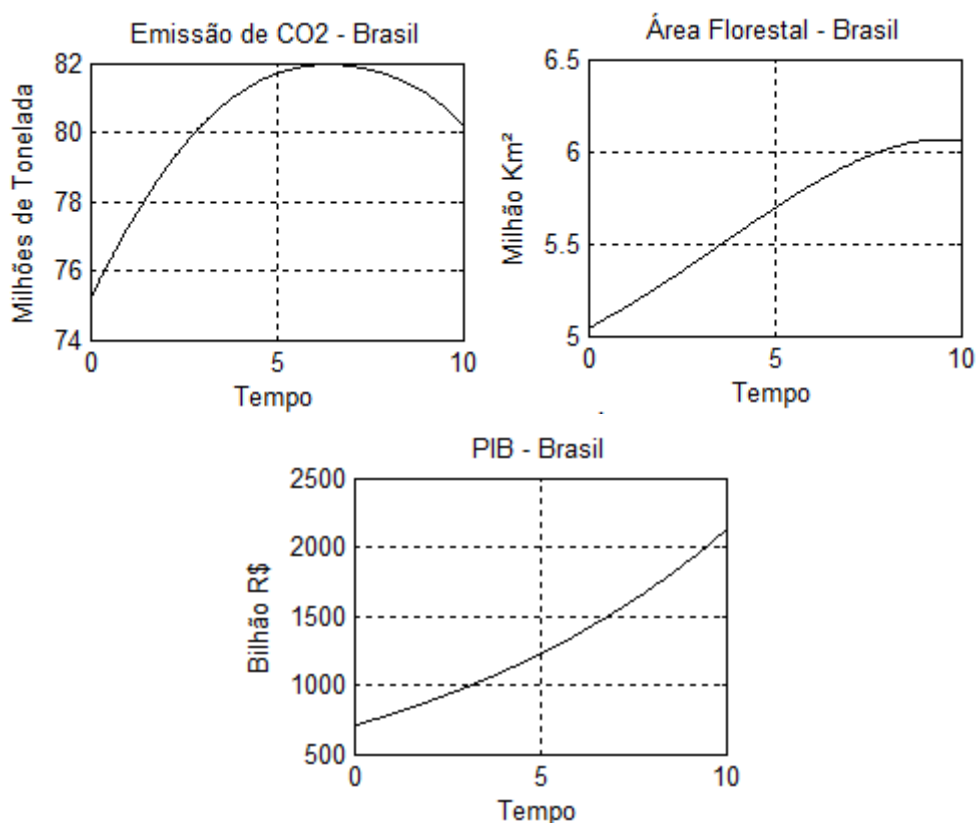


Figura 15 - Emissão de CO_2 , Área Florestal e PIB com controle ótimo

A Figura 3 representa os dados reais encontrados, e deste modo, pode-se observar a diferença na trajetória das variáveis, caso o governo tivesse realizado o investimento nas variáveis de controle.

8.2 Cenário de 2005 até 2015

Nesse caso, o uso das variáveis de controle terá como objetivo observar o que o governo deveria fazer para que a emissão de CO₂ seja reduzida para um nível de emissão 40% menor do que o nível de emissão de 2005, chegando a 57,26 milhões de toneladas. Tal porcentagem é compatível com as perspectivas do Ministro do Meio Ambiente, Carlos Minc, de que o Brasil iria reduzir de 38% a 42% a emissão de CO₂ no país².

Se o Brasil conseguisse atingir o nível de emissão de 57,26 milhões de toneladas de CO₂, assim como mostra a Figura 16, a área florestal do país chegaria ao nível de 5,38 milhões de Km². Além disso, o PIB seria de R\$6,45 trilhões.

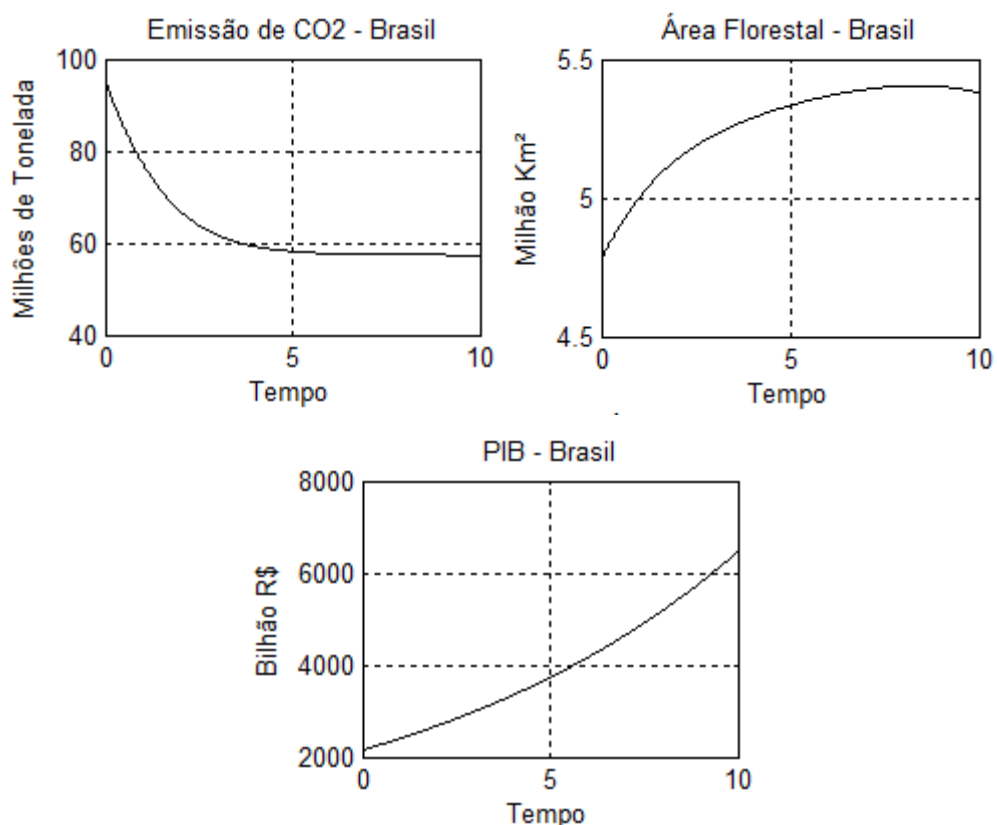


Figura 16 - CO₂, Área Florestal e PIB com controle ótimo

² <http://veja.abril.com.br/noticia/brasil/meta-reducao-co2-brasil-sera-38-42-afirma-carlos-minc-511220.shtml>
 “Meta de redução de CO₂ no Brasil será de 38% a 42%, afirma Carlos Minc”.

Para tal, o índice de performance que minimiza os custos para se atingir um nível ótimo de emissão de CO_2 é dado pela Figura 17. O índice de performance totaliza R\$46,75 bilhões, ou seja, utilizando as variáveis de controle, este será o menor gasto do índice de performance que fará com que o Brasil atinja a meta de emissão de CO_2 de 57,26 milhões de toneladas.

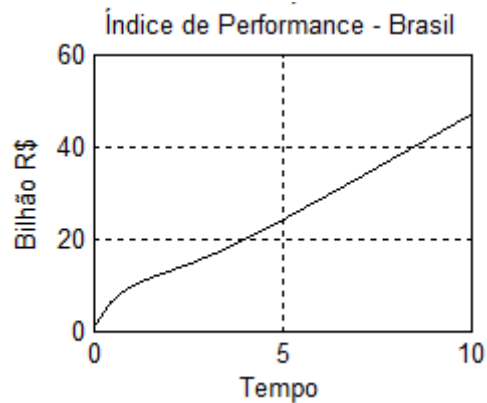


Figura 17 - Índice de Performance

O caminho ótimo das variáveis de controle é dado pela Figura 18. Nela, pode-se perceber que seria necessário que o governo realizasse um alto investimento em reflorestamento e em desenvolvimento de energia limpa no ano inicial, 2005, que seria reduzido ao longo do tempo, assim como aconteceu no cenário anterior.

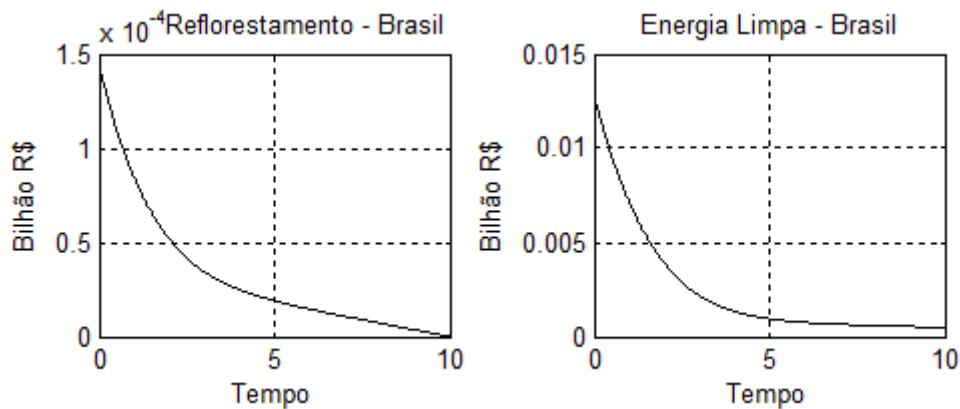


Figura 18 - Controle ótimo

Com relação ao reflorestamento, esse investimento pode ser traduzido como um investimento a cada dois anos de certa quantia, conforme a Figura 19. O seja, se o governo quiser alcançar uma redução de 40% de redução na emissão de CO_2 , ele deverá gastar R\$16,07 milhões, R\$6,47 milhões, R\$3,5 milhões, R\$1,97 milhões e, finalmente, R\$670 mil a cada dois anos, o que totaliza R\$28,68 milhões em dez anos.

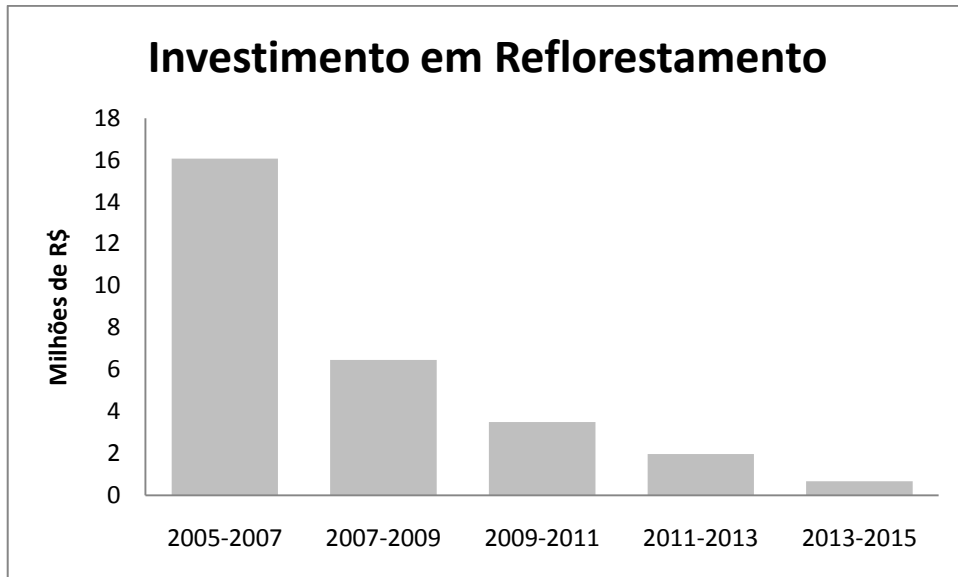


Figura 19 - Investimento em Reflorestamento

Por sua vez, com relação ao investimento em energia limpa, o governo deveria gastar, a cada dois anos, os valores de: R\$1,36 bilhões, R\$422,8 milhões, R\$178,5 milhões, R\$119,1 milhões e R\$97,3 milhões, um total de R\$2,182 bilhões em dez anos, conforme mostra a Figura 20. Assim como acontece com o reflorestamento, pode-se perceber que o maior investimento se dá nos primeiros anos, e decai ao longo dos seguintes.

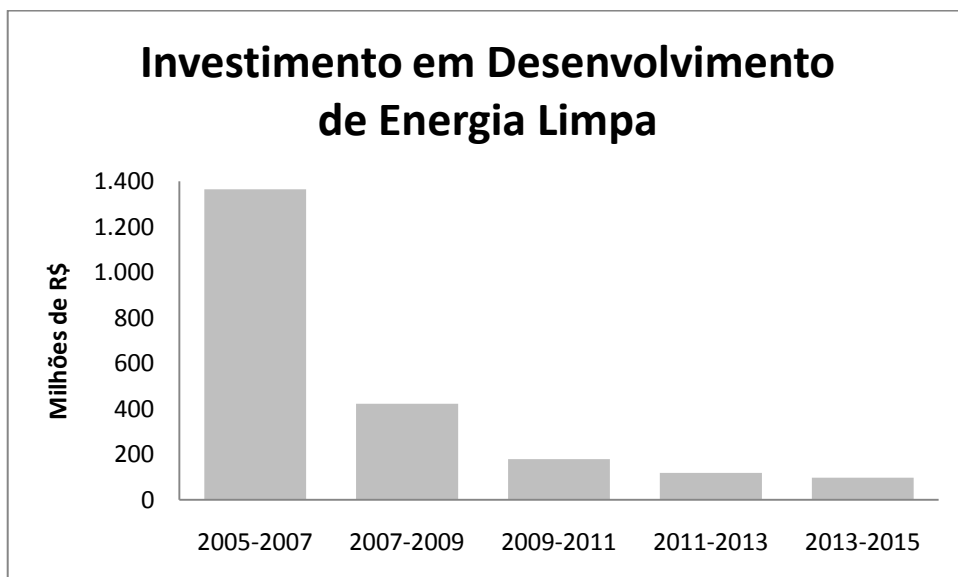


Figura 20 - Investimento em Desenvolvimento de energia Limpa

9 Conclusão

Embora o aquecimento global venha tendo cada vez mais destaque no cenário global, poucas ações efetivas do governo tem sido observadas para conter essa ameaça que vem crescendo ao longo dos anos.

Utilizando o conhecimento da teoria de Otimização dinâmica, conclui-se que o governo brasileiro deveria gastar, para poder reduzir o seu nível de emissão de CO₂ em 40%, um total de R\$28,68 em reflorestamento e R\$2,182 bilhões no desenvolvimento de energias limpas, em um período de 10 anos, totalizando R\$2,211 bilhões. Este valor representa 0,1% do PIB nominal total de 2005.

Além disso, ao comparar os dois cenários estudados, vê-se que, se o governo tivesse realizado os investimentos necessários, de 1995 até 2005, ele teria gasto, no total, R\$707,71 milhões, uma economia de R\$1,504 bilhões.

Pode-se concluir, portanto, que se o governo quiser alcançar níveis mais aceitáveis de emissão de CO₂, ele precisa realizar um investimento baixo se comparado ao seu PIB nominal. Além disso, tal valor só tende a aumentar com o passar dos anos, bem como os danos que vêm sendo causados pelo aquecimento global. Portanto, quantos antes forem realizados esses investimentos, mais barato será combater essa crescente ameaça.

Referências

Caetano, M.A.L., Gherardi, D.F.M., Yoneyama, T. Optimal resource management control for CO₂ and reduction of the greenhouse effect. **Ecological Modelling**, 213, 119–126, 2008

Caetano, M.A.L., Gherardi, D.F.M., Ribeiro, G.P., Yoneyama, T. Reduction of CO₂ emission by optimally tracking a pre-defined target. **Ecological Modelling**, 220, 2536-2542, 2009

Carbon Dioxide Information Analysis Center.

Disponível em: <<http://cdiac.ornl.gov/>>

Acessado em: 1 dez 2009

Carbon Dioxide Information Analysis Center, 2009. Global CO₂ Emissions from Fossil-Fuel Burning, Cement Manufacture, and Gas Flaring: 1751-2006.

Disponível em: <http://cdiac.ornl.gov/ftp/ndp030/global.1751_2006.ems>

Acessado em: 1 dez 2009

Fankhauser, S., Kverndokk, S. The global warming game - Simulations of a CO₂-reduction agreement. **Resource and Energy Economics**, 18, 83 – 102, 1996.

Gore, A. **Uma verdade inconveniente**: o que devemos saber (e fazer) sobre o aquecimento global. Barueri: Manole, 2006. 325p.

Grubb, M. The Greenhouse Effect: Negotiating Targets. **International Affairs (Royal Institute of International Affairs 1944-)**, 66, No. 1, 67-89, 1990

Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada.

Disponível em: <www.ipeadata.org.br>

Acessado em: 5 nov 2009.

National Cancer Institute.

Disponível em:

<http://seer.cancer.gov/csr/1975_2006/browse_csr.php?section=16&page=sect_16_table.04.html>

Acessado em: 1 dez 2009

Rosa, L. P., Schaeffer, R. The case of emissions from dams. **Energy Policy**, 23, No. 2, 149-158, 1995

Shone, R. **Economic Dynamics**. Cambridge University Press. 1997. 436p.

United Nations Framework Convention on Climate Change.

Disponível em: <http://unfccc.int/kyoto_protocol/items/2830.php>

Acessado em: 2 dez 2009

Warrick, R., Farmer, G. The Greenhouse Effect, Climatic Change and Rising Sea Level: Implications for Development. **Transactions of the Institute of British Geographers**, New Series, 15, 5-20, 1990

World Bank, 2009. World Development Indicator.

Disponível em:

<<http://siteresources.worldbank.org/DATASTATISTICS/Resources/wdi09introch3.pdf>.>

Acessado em: 1 out 2009.

Apêndices

Apêndice 1

Para ilustrar melhor a teoria de Otimização, segue um exemplo retirado de Shone (1997), em que o problema de controle é:

$$\max J = \int_0^{10} 5x dt,$$

sujeito à dinâmica $\dot{x} = x + u$ e às condições de contorno $x(0) = 2, x(10) = livre$, sendo que $u(t) \in [0,3]$

Primeiramente, deve-se montar a *Hamiltoniana* deste problema:

$$H(x, u) = V(u, x) + \lambda f(x, u)$$

$$H(x, u) = 5x + \lambda(x + u)$$

$$H(x, u) = (5 + \lambda)x + \lambda u$$

Com isso, define-se as condições de primeira ordem:

- 1) $\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda$ (derivando $H(x, u)$ em função de u)
- 2) $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(5 + \lambda)$ (derivando $H(x, u)$ em função de x)
- 3) $\dot{x} = x + u$
- 4) $\lambda(10) = 0$ (pois o tempo final, neste caso, é livre.)
- 5) $x(0) = 2$

A primeira condição não é suficiente para determinar o valor ótimo da variável de controle u, u^* , uma vez que depende do sinal de λ (se positivo, o valor máximo será 3; se negativo, o valor será mínimo, -3). Porém, pela condição 2, tem-se que:

$$\dot{\lambda} = -\lambda - 5$$

$$\lambda^*(t) = ke^{-t} - 5$$

Como $t=10$, então

$$\lambda^*(10) = ke^{-10} - 5 = 0$$

$$k = 5e^{10}$$

$$\therefore \lambda^*(t) = 5e^{10-t} - 5$$

Dado que $u^*(t) = 3$, então:

$$\dot{x}^* = x^* + 3$$

$$x^*(t) = -3 + ke^t$$

$$x(0) = -3 + ke^0 = 2$$

$$k = 5$$

Então, obtém-se que o valor ótimo de x será:

$$x^*(t) = -3 + 5e^t$$

Como resultado, a variável de controle permanece estável em 3 e a variável de estado cresce de acordo com o tempo que, como dito no enunciado, é livre, e portanto, não possui restrição. O problema então retornou o caminho ótimo para a variável de estado, x .

Apêndice 2

```

Programação para o Cenário de 1995 até 2005
% CO2
%=====
clear all
clc

global T
global x0
global y0
global z0
global a
global b
global c
global r
global s
global h
global gama
global alpha1
global alpha2
global delta

a=0.01;
b=10000;
c=100000;
r=0.046;
s=1100;
h=0.006;
gama=0.11;
alpha1=0.0015;
alpha2=0.0001;
delta=0.01;

x0=75.149;
z0=5.039;
y0=705.641;
T=10;

H = []; G = []; x = []; J = [];
%=====INICIALIZACAO PARAMETROS

type co2BInit;
type co2BM;
type co2BRes;

%=====

```

```

close all;
solinit = bvpinit(linspace(0,1,101),@co2BInit);
options = bvpset('Stats','on','RelTol',1e-6);

sol = bvp4c(@co2BM,@co2BRes,solinit,options);

t = sol.x;
x = sol.y;

for i=1:1:size(t,2)
    uan1(i)=(-x(6,i)*x(3,i))/(2*b*exp(-delta*t(i)));
    uan2(i)=(x(5,i)*x(3,i))/(2*c*exp(-delta*t(i)));
end;

cont=1;
for i=1:1:size(t,2)
    if i==1
        tj(cont)=cont*0.1;
        J(cont)=exp(-delta*t(i))*(a*(x(1,i)-
80)^2)+(b*uan1(i)^2)+(c*uan2(i)^2);
        cont=cont+1
    else
        tj(cont)=cont*0.1;
        J(cont) = J(cont-1)+exp(-delta*t(i))*(a*(x(1,i)-
80)^2)+(b*uan1(i)^2)+(c*uan2(i)^2);
        cont=cont+1;
    end
end

time=t*x(8,length(t));
clf reset

subplot(221)
plot(time,x(1,:),'-k')
hold on
title('Emissão de CO2 - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Milhões de Tonelada')
grid

subplot(222)
plot(time,x(2,:),'-k')
hold on
title('Área Florestal - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Milhão Km²')
grid

subplot(223)
plot(time,x(3,:),'-k')
hold on
title('PIB - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Bilhão R$')
grid

```

```

subplot(224)
plot(time,J,'-k')
title('Índice de Performance - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Bilhão R$')
grid
hold on

figure
subplot(221)
plot(time,uan1,'-k')
hold on
title('          Reflorestamento - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Bilhão R$')
grid

subplot(222)
plot(time,uan2,'-k')
hold on
title('          Energia Limpa - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Bilhão R$')
grid

Programação para o Cenário de 2005 até 2015
% CO2
%=====
clear all
clc

global T
global x0
global y0
global z0
global a
global b
global c
global r
global s
global h
global gama
global alpha1
global alpha2
global delta

a=0.0001;
b=200;
c=1000;
r=0.046;
s=1100;
h=0.006;
gama=0.11;
alpha1=0.0015;
alpha2=0.0001;
delta=0.001;

x0=95.441;
z0=4.777;

```

```

y0=2147.239;
T=10;

H = []; G = []; x = []; J = [];
%=====INICIALIZACAO PARAMETROS

type co2Init;
type co2M;
type co2Res;

%=====
close all;
solinit = bvpinit(linspace(0,1,101),@co2Init);
options = bvpset('Stats','on','RelTol',1e-6);

sol = bvp4c(@co2M,@co2Res,solinit,options);

t = sol.x;
x = sol.y;

for i=1:1:size(t,2)
    uan1(i)=(-x(6,i)*x(3,i))/(2*b*exp(-delta*t(i)));
    uan2(i)=(x(5,i)*x(3,i))/(2*c*exp(-delta*t(i)));
end;

cont=1;
for i=1:1:size(t,2)
    if i==1
        tj(cont)=cont*0.1;
        J(cont)=exp(-delta*t(i))*(a*(x(1,i)-
80)^2)+(b*uan1(i)^2)+(c*uan2(i)^2);
        cont=cont+1
    else
        tj(cont)=cont*0.1;
        J(cont) = J(cont-1)+exp(-delta*t(i))*(a*(x(1,i)-
80)^2)+(b*uan1(i)^2)+(c*uan2(i)^2);
        cont=cont+1;
    end
end

time=t*x(8,length(t));
clf reset

subplot(221)
plot(time,x(1,:),'-k')
hold on
title('Emissão de CO2 - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Milhões de Tonelada')
grid

subplot(222)
plot(time,x(2,:),'-k')
hold on
title('Área Florestal - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Milhão Km²')

```

```
grid
```

```
subplot(223)
plot(time,x(3,:),'-k')
title('PIB - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Bilhão R$')
grid
hold on
```

```
subplot(224)
plot(time,J,'-k')
title('Índice de Performance - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Bilhão R$')
grid
hold on
```

```
figure
subplot(221)
plot(time,uan1,'-k')
hold on
title('Reflorestamento - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Bilhão R$')
grid
```

```
subplot(222)
plot(time,uan2,'-k')
hold on
title('Energia Limpa - Brasil')
xlabel('Tempo')
ylabel('Bilhão R$')
grid
```