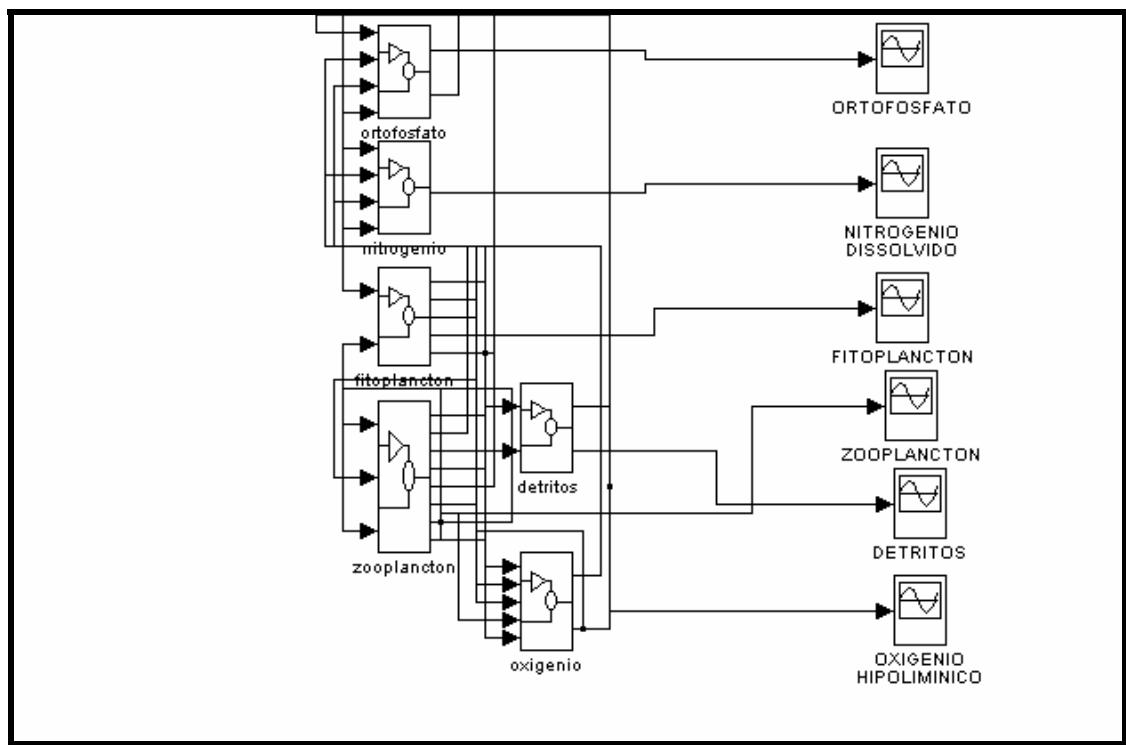


Curso

SIMULINK - Simulação de Modelos Quantitativos em Meio Ambiente



Prof. Dr. Marco Antonio Leonel Caetano

Depto de Estatística, Matemática Aplicada e Computacional

UNESP - Rio Claro - SP

1997

1- Integradores Numéricos

Ao se tentar fazer previsões utilizando os modelos matemáticos, muitas pessoas podem se desanimar uma vez que, como já foi mencionado, modelar a natureza não é questão trivial.

Mesmo conseguindo modelar de forma adequada, um pesquisador pode se deparar com uma grande dor de cabeça: Como encontrar a solução de um modelo de poluição ambiental que envolva 100 variáveis diferenciais e 200 parâmetros para serem ajustados? Tentar resolver de maneira analítica: IMPOSSÍVEL! Tanto utilizando os programas computacionais hoje existentes, que resolvem de maneira algébrica ou tentar utilizar técnicas para resolver com aproximações não darão resultados.

É neste ponto que entram os chamados integradores numéricos, que através de recursividade conseguem integrar sistemas complexos com muitas variáveis e parâmetros partindo de condições iniciais que lhes são fornecidos.

Existem excelentes integradores numéricos, e esta é uma área onde muito se investiu quando os primeiros computadores mostraram que era viável a utilização de recursividade na resolução de problemas complexos. Dentre os mais utilizados no meio científico destacam-se: Runge-Kutta, Runge-Kutta/Felberg, Adams, etc., sendo os melhores aqueles que permitem trabalhar com passo de integração variável.

Os métodos de Runge-Kutta são métodos numéricos para solução de equações diferenciais. A ordem do método diz quantas avaliações ele realiza ao longo da integração. Assim, o método de Runge-Kutta de primeira ordem, conhecido como método de Euler :

$$\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + hk_1 \\ k_1 = f(t_k, y_k) \end{array}$$

onde h é o passo de integração e apenas uma avaliação da função é feita , no caso em k_1 .

O método de Runge-Kutta de segunda ordem é dado pelas equações:

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\k_1 &= f(t_k, y_k) \\k_2 &= f(t_k + h, y_k + hk_1)\end{aligned}$$

onde então duas avaliações da função são realizadas, k_1 e k_2 . Desses métodos o mais conhecido e utilizado é o método de Runge-Kutta de quarta ordem onde quatro avaliações são realizadas na função:

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\k_1 &= f(t_k, y_k) \\k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right) \\k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3)\end{aligned}$$

Cuidados especiais devem ser tomados em relação a métodos numéricos, que normalmente são utilizados sem averiguação da função a ser integrada. Muitas funções devem ser integradas com passos variáveis pois o integrador de passo fixo pode apresentar resultados camuflados de erros. Neste contexto, aparecem os integradores tipo *previsor-corretor* onde um método de ordem mais baixa é usado para estimar os valores futuros da função e ajusta o passo, sendo em seguida corrigido por um integrador de ordem mais alta. Destes, destaca-se o *integrador de Runge-Kutta-Felberg 7/8 ordem* onde um integrador de sétima ordem avalia a função e um de ordem oito vem logo em seguida corrigindo os resultados.

Modelamento Matemático para Planejamento Regional

A capacidade de avaliar quantitativamente a evolução de um ecossistema, principalmente no tocante a alterações potencialmente adversas para a natureza e para o ser humano, permite que a sociedade possa intervir de forma precoce no sentido de evitar transtornos futuros. Como exemplo, apresenta-se aqui o seguinte modelo de poluição de um lago.

O Problema

O problema consiste em fazer previsões para futuros investimentos industriais numa região composta por uma lagoa ou represa de água salgada, onde a principal fonte financeira é o cultivo de frutos do mar. Este problema foi formulado e resolvido por Boynton , Hawkins e Gray^[1] e consiste em planejar que tipos de investimentos devem ser alocados para um crescimento adequado das cidades ao redor da lagoa sem prejudicar o meio biológico existente. O modelo é bastante complexo e envolve 16 variáveis que medem desde aspectos biológicos até aspectos sobre o comprometimento do turismo regional. Para efeito de simplificação, apresentaremos uma situação hipotética com 13 variáveis, excluindo as variáveis que representam o turismo regional.

Os valores também são hipotéticos, onde a finalidade aqui é apenas mostrar o comportamento e inter-relações destas variáveis e não seu resultado numérico.

O Modelo

O modelo é bastante interessante e nele são consideradas as variáveis econômicas, biológicas e populacional. A idéia é apresentar, sobre determinados parâmetros conhecidos, o comportamento de cada variável frente às variações globais durante um determinado período de tempo. O modelo é da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= k_1 x_2 x_3 - k_2 x_1 \\ \dot{x}_2 &= k_2 x_1 - k_3 x_2 x_3 \\ \dot{x}_3 &= k_4 x_5 x_4 I_0 + k_5 I_2 I_3 + k_{55} x_4 + k_7 x_9 - k_8 x_3 - k_9 k_{10} x_6 - k_{11} x_3 \\ \dot{x}_4 &= k_{12} x_2 x_3 + k_{13} x_3 + k_{14} x_4 x_9 - k_{15} x_4^2 - k_{16} x_4 - k_{57} x_4 \\ \dot{x}_5 &= k_{17} x_2 + k_{18} (x_4 - k_{19} x_4^2) + k_{20} x_{11} - k_{21} x_5 \\ \dot{x}_6 &= k_{22} I_2 x_4 x_5 - k_9 x_6 - k_{23} x_6 + k_{56} x_6 \\ \dot{x}_7 &= k_{27} x_8 x_9 - k_7 x_7 - k_{28} x_7 \\ \dot{x}_8 &= k_{29} x_7 + k_{14} x_4 x_7 - k_{30} x_8 x_9 - k_{31} x_8 \\ \dot{x}_9 &= k_{34} x_{10} - k_{35} x_9 - k_{26} x_8 x_9 - k_{37} x_9 x_{11} \\ \dot{x}_{10} &= k_{38} I_7 I_6 + k_{39} I_{10} x_2 - k_{40} x_{10} - k_{41} x_{10} - k_{42} x_{10} - k_{34} x_{10} \\ \dot{x}_{11} &= k_{43} I_6 I_9 + k_{44} x_4 - k_{45} x_{11} \\ \dot{x}_{12} &= k_{47} I_6 I_8 + k_{48} x_6 - k_{49} x_{12} - k_{50} I_{10} x_{12} \\ \dot{x}_{13} &= k_{51} I_6 I_5 + k_{52} x_6 - k_{53} x_{13}\end{aligned}$$

onde

x_1 :área urbanizada; x_2 :área possível de ser urbanizada; x_3 :capital local; x_4 :estrutura da cidade; x_5 :imagem da cidade; x_6 :residentes; x_7 :capital industrial; x_8 :estrutura

industrial; x_9 :frutos do mar; x_{10} :matéria orgânica despejada; x_{11} :toxinas; x_{12} :nutrientes; x_{13} :coliforme fecal.

Os parâmetros **I** e **k** são parâmetros de proporcionalidade entre as variáveis e dependem das séries históricas e estatísticas sobre o comportamento das variáveis durante um longo período de tempo.

Simulação

Foram adotadas como condições iniciais para este exemplo valores hipotéticos e adimensionais, servindo apenas para uma demonstração didática do modelo. Assim:

$x_1(0) = 4$	$x_2(0) = 8$	$x_3(0) = 200$	$x_4(0) = 73.4$	$x_5(0) = 0.1$
$x_6(0) = 300$	$x_7(0) = 248$	$x_8(0) = 2.27$	$x_9(0) = 7.8$	$x_{10}(0) = 2.72$
$x_{11}(0) = 1.09$	$x_{12}(0) = 20$	$x_{13}(0) = 5.75$	tempo final = 4anos	

Olhando para as variáveis biológicas na Figura 1 percebe-se que a estratégia utilizada não é recomendável, uma vez que, apesar da matéria orgânica despejada no lago e os nutrientes diminuírem radicalmente a zero em 4 anos, a quantidade de toxinas e coliforme fecal aumentaram abruptamente em consequência do grande aumento de residentes (Figura 3) atraídos pelos investimentos industriais (Figura 3), não estando a região adequadamente preparada do ponto de vista do saneamento básico (Figura 2) onde o valor final da parte estrutural da cidade foi menor do que no início.

Outro responsável pela poluição deste lago é apontado no indicador de estrutura industrial, que de zero teve um excelente aumento indo a mais de 3000 (Figura 3). Porém, como este desenvolvimento não foi auto-sustentável, ou seja, não houve uma adequação com o meio ambiente, percebe-se que as indústrias instaladas tiveram prejuízo ao cabo de 4 anos (Figura 3), por estas estarem inteiramente ligadas aos produtos do lago, que foram a zero (Figura 2). Isto contrasta com o capital local que teve aumento ao fim de 4 anos, mas um aumento que sairá caro para a região, uma vez que sua fonte original de renda voltada à biosfera do lago foi exterminada pelo mau planejamento urbano ao receber indústrias e novos residentes.

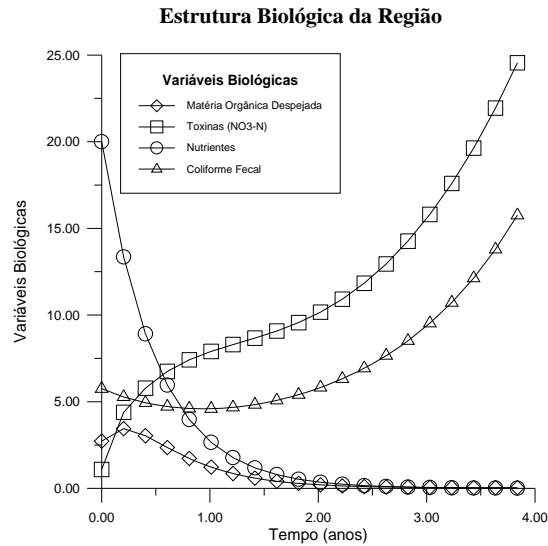


Figura -1-

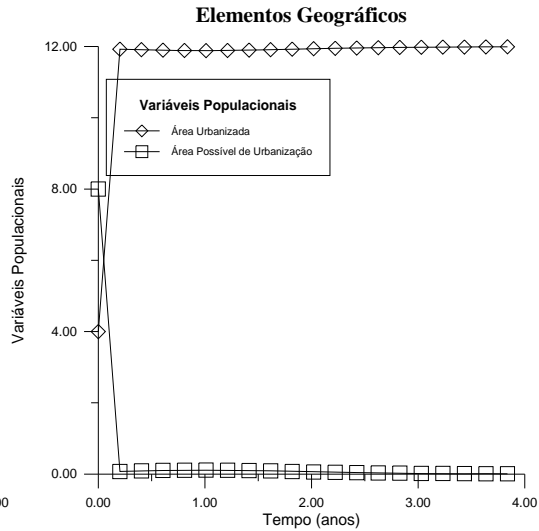


Figura -2-

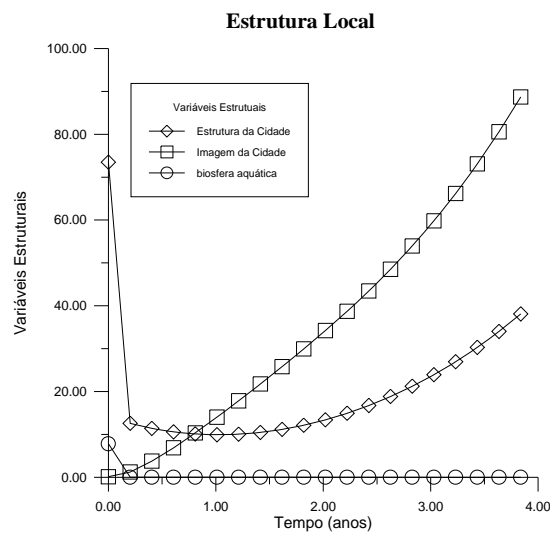


Figura -3-

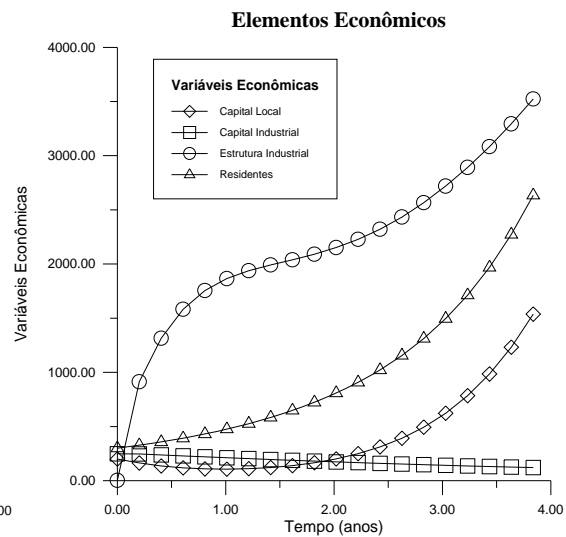


Figura -4-

2- A Importância na Escolha do Método Numérico

A escolha de um método numérico para a simulação de sistemas dinâmicos é de fundamental importância para uma conclusão segura e coesa sobre o evento. Mostraremos primeiramente como funciona o método de Euler. Suponhamos que tenhamos que resolver a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -ty$$

$$y(0) = 1$$

Neste caso, teremos como fazer uma verificação sobre a precisão ou não do método escolhido uma vez que a solução analítica é facilmente obtida e será:

$$y(t) = e^{-t^2/2}$$

Como já foi vista, a fórmula para o método de Euler é:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

e escolhendo a variação no tempo

$$t_{k+1} = t_k + h$$

poderemos passo a passo obter, escolhendo como $h = 0.1$ de $t = 0$ até $t = 1$,

<i>Tempo t_k</i>	<i>Função y_k</i>
$t_0 = 0$	$y_0 = 1$
$t_1 = 0.1$	$y_1 = y_0 + 0.1 \cdot (-t_0 \cdot y_0) = 1$
$t_2 = 0.2$	$y_2 = y_1 + 0.1 \cdot (-t_1 \cdot y_1) = 0.99$
$t_3 = 0.3$	$y_3 = y_2 + 0.1 \cdot (-t_2 \cdot y_2) = 0.9702$
$t_4 = 0.4$	$y_4 = y_3 + 0.1 \cdot (-t_3 \cdot y_3) = 0.941094$
$t_5 = 0.5$	$y_5 = y_4 + 0.1 \cdot (-t_4 \cdot y_4) = 0.90345024$

Se compararmos com a solução,

$y(0) = 1;$	<i>erro = 0.0;</i>
$y(0.1) = 0.99501;$	<i>erro = 0.00499;</i>
$y(0.2) = 0.98019;$	<i>erro = 0.00981;</i>
$y(0.3) = 0.95599;$	<i>erro = 0.01421;</i>
$y(0.4) = 0.92311;$	<i>erro = 0.01798;</i>
$y(0.5) = 0.88249;$	<i>erro = 0.02096;</i>

Estes erros parecem pequenos, e o resultado apresentado para alguém que está vendo o método pela primeira vez pode achar que fez uma boa escolha. Vejamos outro exemplo. Suponhamos que se quer simular o desempenho de um biodigestor para estimar seu custo ou lucro na operação de obtenção de gás. O sistema de equações diferenciais é:

$$\frac{dy_1}{dt} = 3y_1 - y_1y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1y_2 - 2y_2$$

$$y_1(0) = 1$$

$$y_2(0) = 2$$

onde as variáveis y_1 e y_2 indicam quantidade de gás liberado e velocidade com que o processo ocorre.

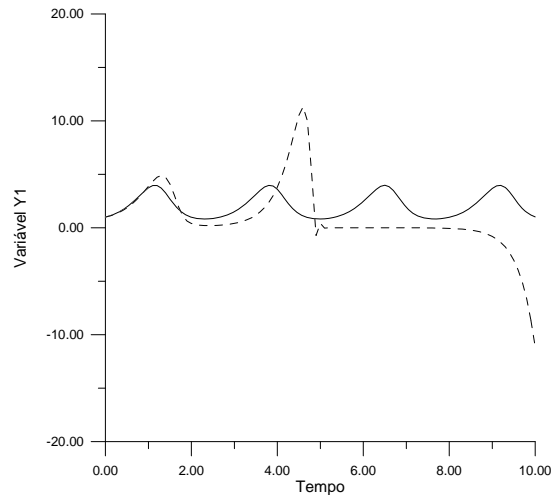


Figura - 5 - Variável Y1

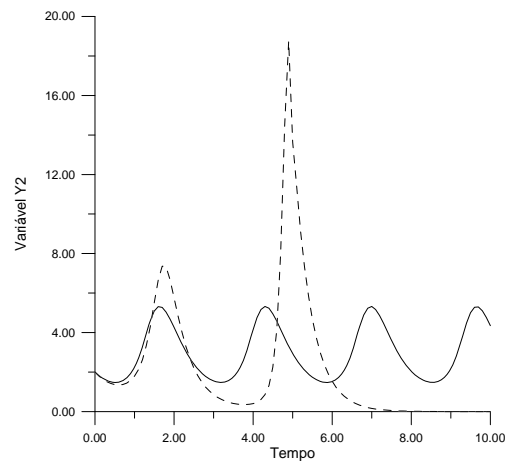


Figura - 6 - Variável Y2

As figuras 5 e 6 mostram os resultados desastrosos que ocorrem com o método de Euler em comparação com um método de Runge-Kutta de 4ª ordem. A linha cheia apresenta o método de Runge-kutta de 4ª ordem e a linha tracejada apresenta o método de Euler.

Pelo método de Euler a produção de gás é negativa com o passar do tempo, ou seja, o biodigestor “rouba” gás do meio ambiente e ainda com velocidade nula! Com isso, queremos mostrar que, isto não acontece apenas com o método de Euler mas com qualquer método que seja utilizado inadequadamente em fenômenos naturais.

Vejam os resultados da comparação entre um método de Runge-Kutta de 2ª ordem com passo variável com um corretor de 3ª ordem também conhecido como RK2/3 e um RK4/5 (previsor de 4ª ordem e corretor de 5ª ordem).

Tomemos o sistema dinâmico que representa o conhecido problema de presa-predador:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 - 0.01y_1y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -y_2 + 0.02y_1y_2$$

$$y_1(0) = 20$$

$$y_2(0) = 20$$

onde a variável y_1 representa o predador e a variável y_2 representa a presa fugindo de seu predador. Ambos começam com o mesmo tamanho de população sendo que o sistema nos diz, através das equações que, o predador cresce proporcional a população existente, mas morre na inter-relação com sua presa, uma vez que quando ela desaparece, a população de predadores diminuem e começam a brigar entre si por mais comida. Esta proporção de relação é indicada pelo termo $0.01y_1y_2$ para o predador e $0.02y_1y_2$ para a presa. A simulação realizada com RK2/3 e RK4/5 é apresentada pelos gráficos 7 e 8.

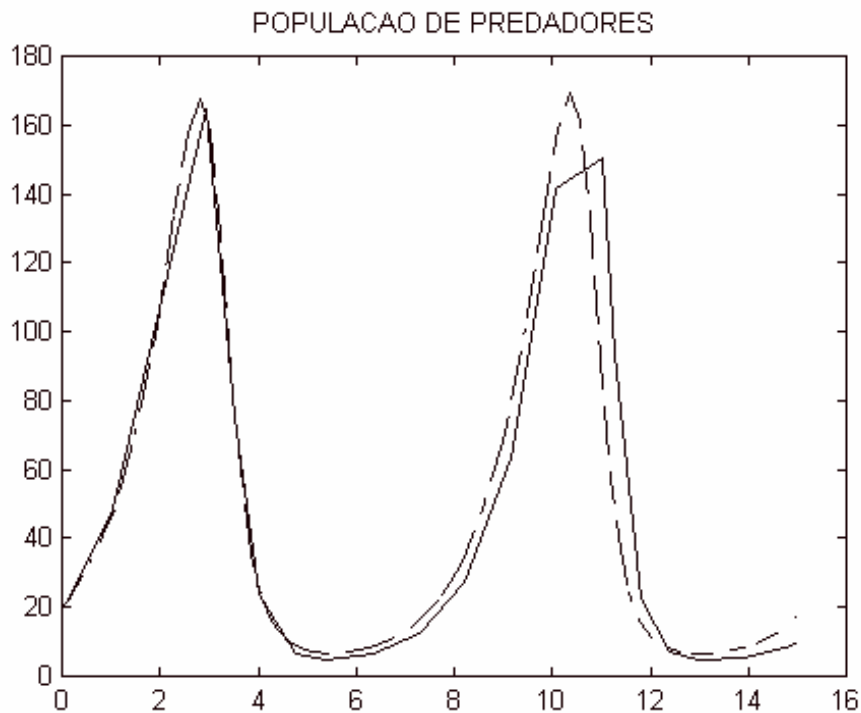


Figura - 7-

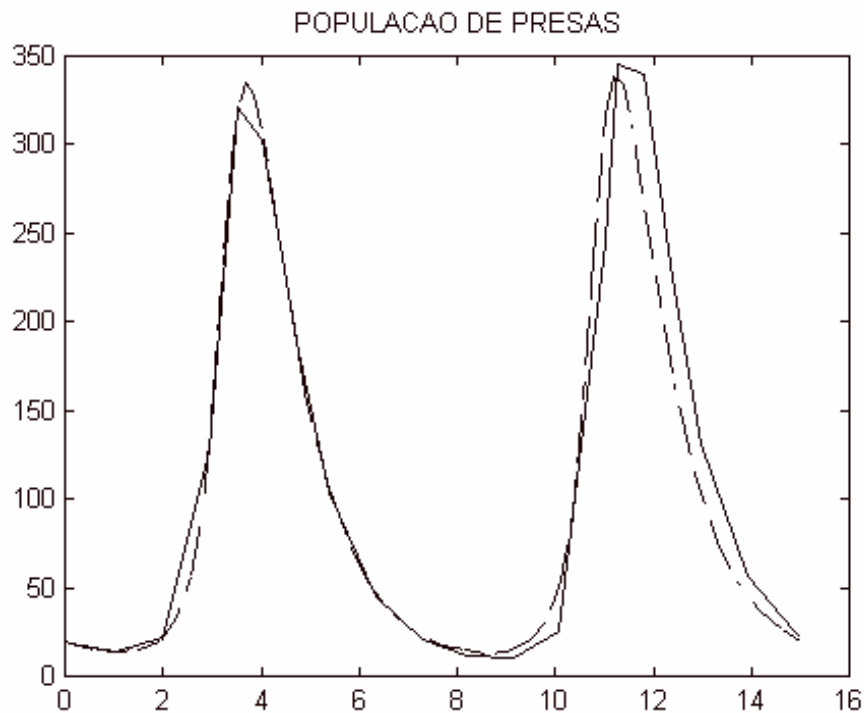


Figura - 8-

Como pode-se observar, novamente ocorre um grande erro na simulação do método RK2/3 em relação ao método RK4/5. O erro não é tão discrepante quanto o método de Euler fornece mas, ainda assim é perigoso em termos de estimativas. Como sabemos que RK4/5 é melhor, ou em outros termos, como podemos afirmar que o método RK4/5 dá a solução exata.

A resposta é: Não podemos! Não podemos porque a resposta do método previsor-corretor RK4/5 também apresentará erro, uma vez que tanto ele quanto o método RK2/3 ou o método de Euler são derivados da expansão de funções em série de Taylor. O que sabemos é que ele é melhor do que o método RK2/3 porque quando comparado com funções que apresentam soluções analíticas, seu erro é sempre menor do que o RK2/3. Logo, sua resposta deverá ser melhor para uma determinada família de problemas.

Para finalizar este tópico, o que o leitor deve concluir de importante é que deve ter muita atenção ao escolher o tipo de método numérico a ser utilizado para não ter surpresas desagradáveis no futuro.

3- O Uso do SIMULINK-MATLAB em Simulações

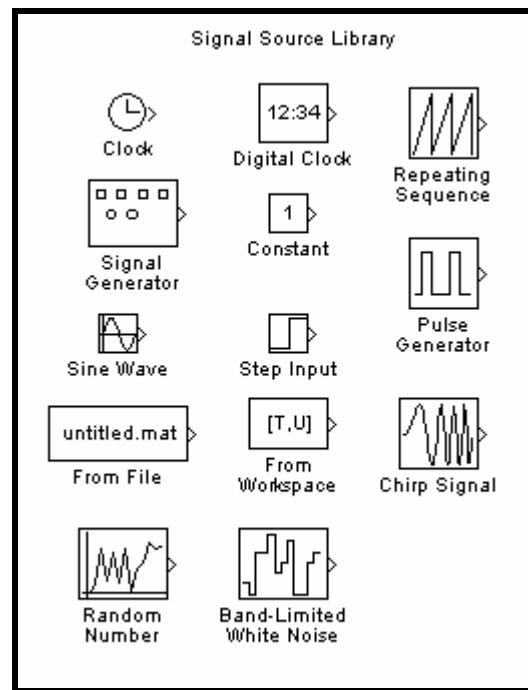
Os métodos numéricos, com exceção ao método de Euler, não são fáceis de implementar para pessoas que não são da área de matemática computacional. Para essas implementações são necessários os conhecimentos de linguagem de programação, análise numérica e técnicas de programação não muito usuais e de difícil acesso para um pesquisador que não da área de exatas.

Recentemente, esta dificuldade, que fazia com que pesquisadores não tão íntimos com computação se afastassem dos modelos matemáticos, está sendo superada com o programa computacional *Simulink-Matlab*.

Este programa permite que pesquisadores de qualquer área que desejam fazer uso dos modelos matemáticos o possam fazer sem ser conhecedor de linguagem ou técnicas de programação computacional. Isto é muito bom, pois modelos matemáticos aposentados começam a se tornar novamente utilizados agora com mais frequência na análise de fenômeno naturais.

Vamos a partir de agora apresentar alguns comandos importantes desse software, necessários na simulação de fenômenos ligados à meio ambiente. São eles:

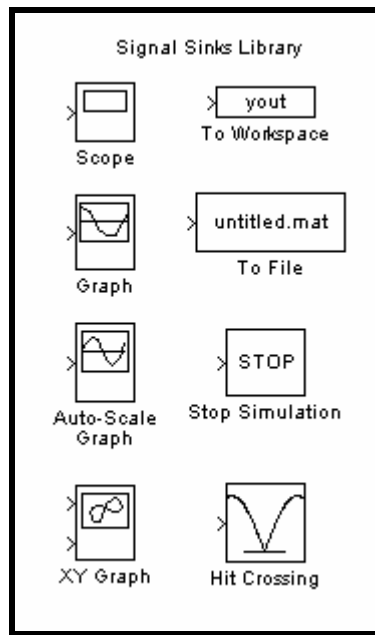
(a) *Biblioteca dos Comandos de Entrada*



Nesta biblioteca é possível fazer uma simulação colocando como entrada sinais espaçados com o tempo do relógio interno do computador utilizando *clock* ou *digital clock*. Dentro de *Signal Generator* é possível simular como entrada sinais do tipo senóide, onda quadrada, sequência repetida ou ainda ruído aleatório. Aliás, estes comandos também podem ser obtidos isoladamente através de *Sine Wave*, *Random Number*, *Pulse Generator*, *Step Input* e *Repeating Sequence*. Um sinal também interessante de ser utilizado em processos estocásticos, ou seja, processos com variação aleatória no tempo é o *White Noise* onde é gerado um ruído branco.

Podemos entrar ainda apenas com um valor constante no sistema através do comando *Constant*. A entrada pode ser via externa ao Simulink, através de arquivos gerados em qualquer outro software através do comando *From File* ou de qualquer arquivo gerado dentro do próprio ambiente Matlab, através de *From Workspace*.

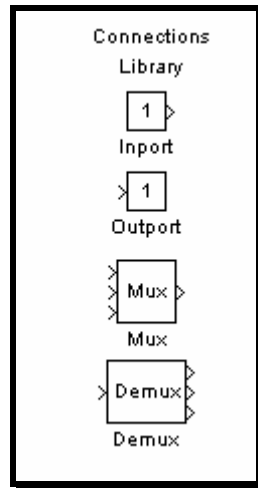
(b) *Biblioteca dos sinais de saída*



As saídas são as visualizações dos resultados das simulações. Nesta biblioteca tem-se uma visualização através de um osciloscópio virtual através da caixa de comando *Scope*. Outra saída pode ser fornecida através de gráficos que podem ser sem auto-escala com *Graph* ou com auto-escala através de *Auto-Scale Graph*, ou ainda eliminando o tempo das visualizações e só observando os resultados através da variação entre as variáveis com o comando *XYGraph*.

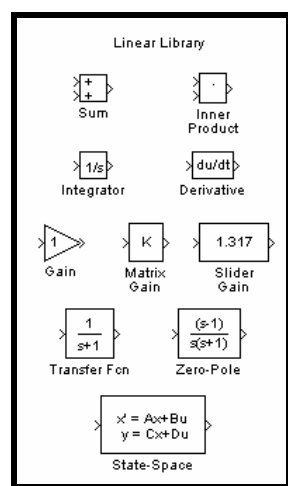
Assim como a entrada, na saída podemos salvar os resultados para o Matlab através de *To Workspace* ou para um arquivo de outro aplicativo através de *To File*. Podemos ainda terminar uma simulação através de *Stop*.

(c) *Biblioteca de Conexões*



Esta é uma biblioteca importante pois essas conexões fazem o papel do comando *go to* presente em quase todas as linguagens de programação, permitindo a interrupção do fluxograma em um lugar e continuação em outro. Para isto basta utilizar os comandos *Inport* ou *Outputport*. Quando for desejado de um único caminho de simulação passarmos para vários outros utilizaremos o comando *Demux* e no caso contrário utilizamos o comando *Mux*.

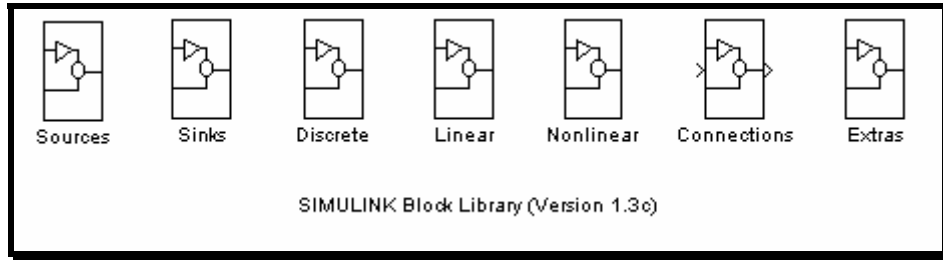
(d) *Biblioteca Linear*



Esta é a biblioteca mais importante para a simulação de sistemas dinâmicos. Nela poderemos somar as variáveis através de *Sum*, o produto através de *Inner*

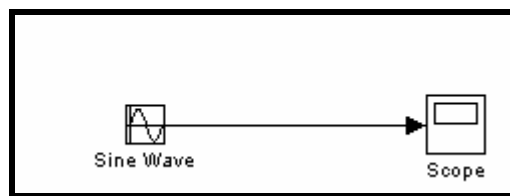
product ou *Gain* ou ainda *Matrix Gain* para sistemas multivariáveis, derivar numericamente uma função através de *Derivative*. O comando *Integrator* nos apresenta a possibilidade de utilização dos métodos de integração numérica comentados anteriormente onde deve-se entrar com as condições iniciais das variáveis.

Todas essas bibliotecas estão dentro da caixa principal do Simulink assim que o usuário entra no programa.

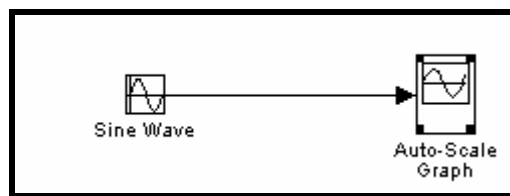


4- O Funcionamento do Simulink

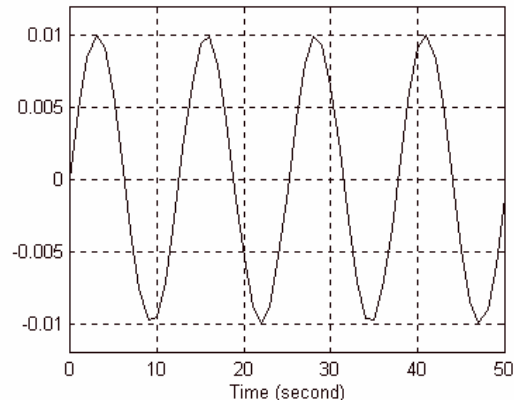
Como pode ser visto, cada comando apresenta uma seta de entrada e/ou saída de sua caixa. Isto existe para poder permitir a conexão das variáveis através de flexas de ligação entre uma caixa e outra. Assim, por exemplo:



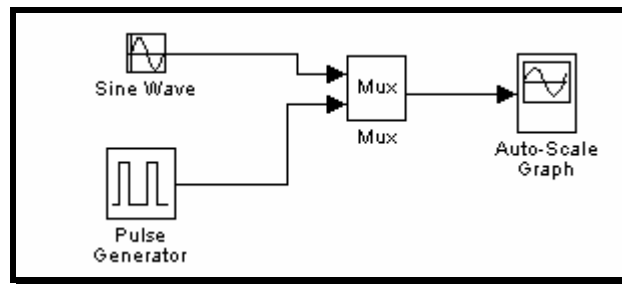
Esta caixa representa um programa simples que gera uma onda senóide para ser visualizada num osciloscópio virtual, com amplitude, frequência e tempo de realização da simulação escolhidos pelo usuário. Já a caixa



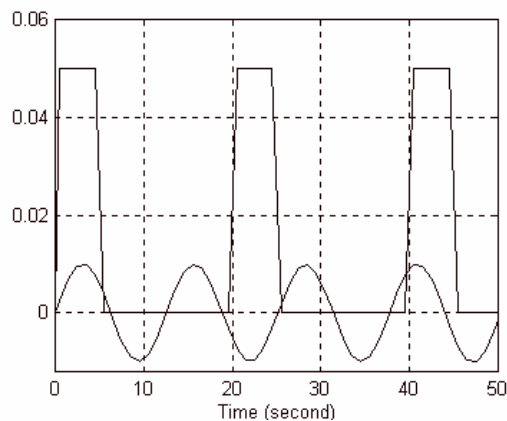
permite que se visualize o gráfico da onda no mostrador gráfico do matlab, tendo como resultado a figura seguinte:



Imaginemos que desejamos visualizar duas trajetórias ao mesmo tempo, uma tipo onda seno e outra onda quadrada. Para isto precisaríamos alterar o programa anterior e incluir os geradores das ondas mais o comando *Mux* para a saída múltipla de resultados. O programa seria:



que resultaria no gráfico seguinte:



Utilizando o Simulink, vejamos como ficaria a resolução de um sistema de equações diferenciais

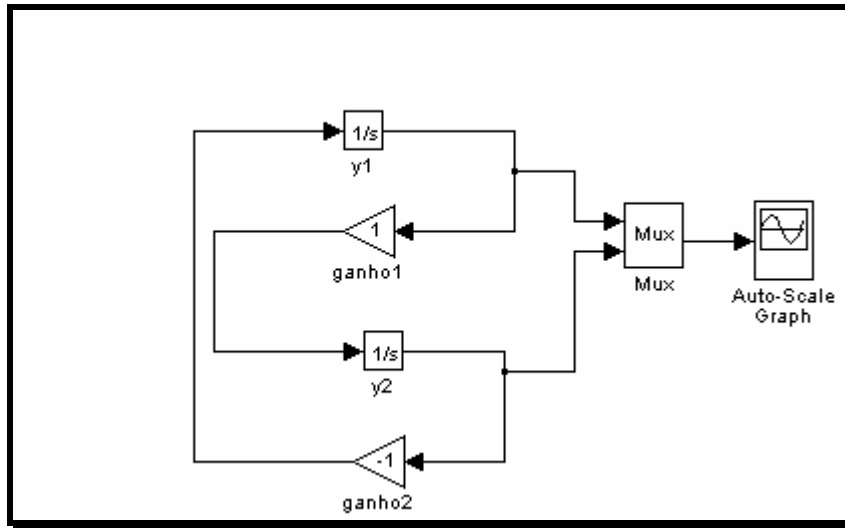
$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1$$

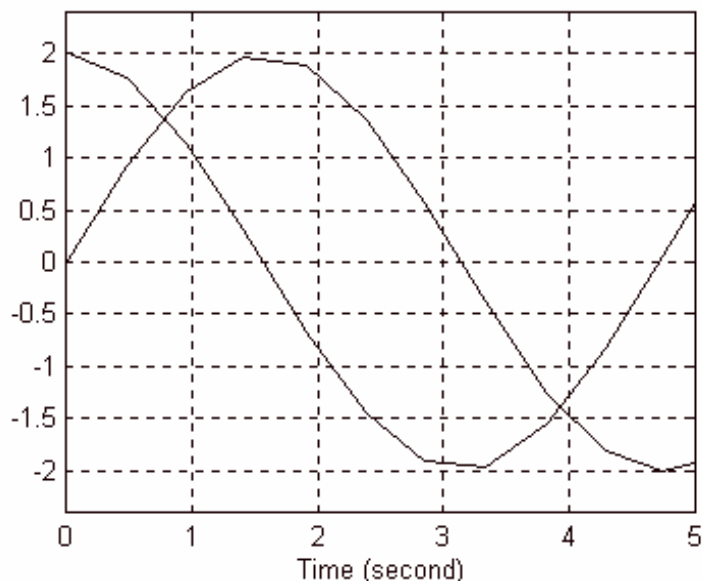
$$y_1(0) = 2$$

$$y_2(0) = 1$$

utilizando então a caixa de programas do simulink seria necessário construir um programa que utilizasse a caixa *Integrator* para a simulação numérica. Este programa ficaria:



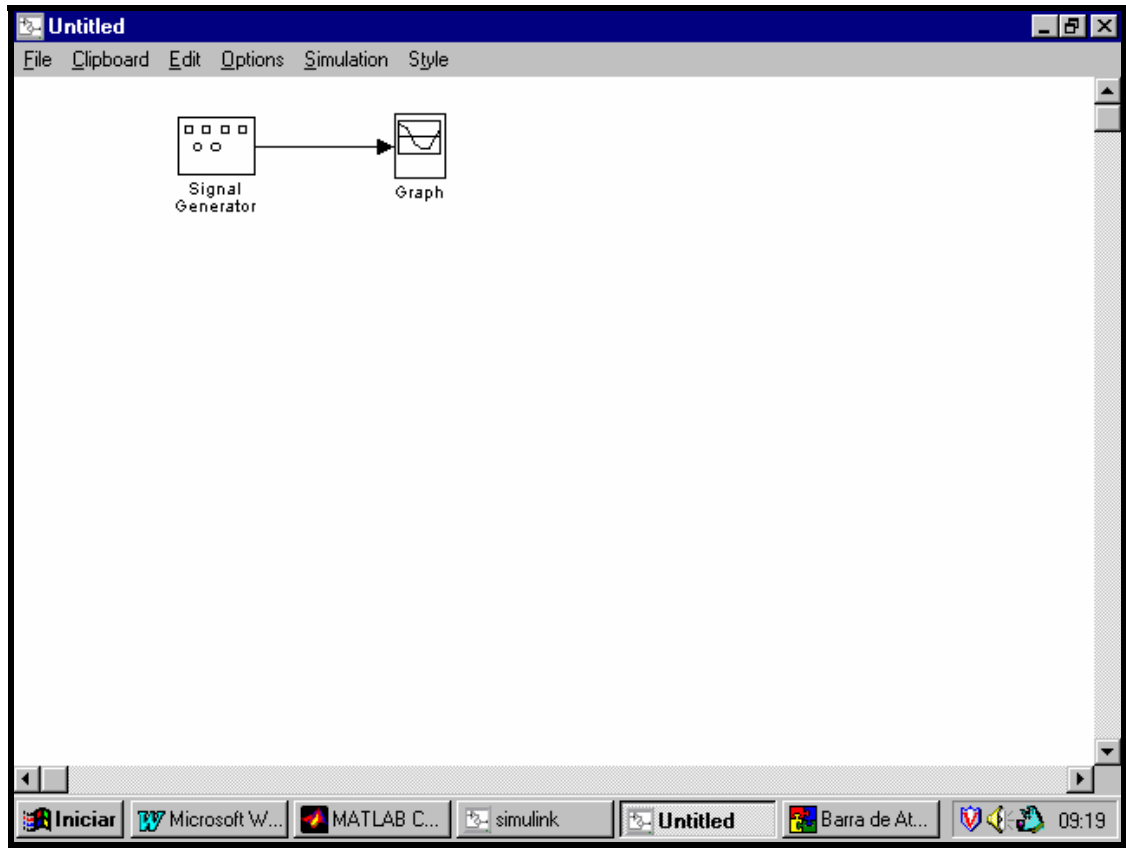
cujo gráfico da solução deste sistema seria:



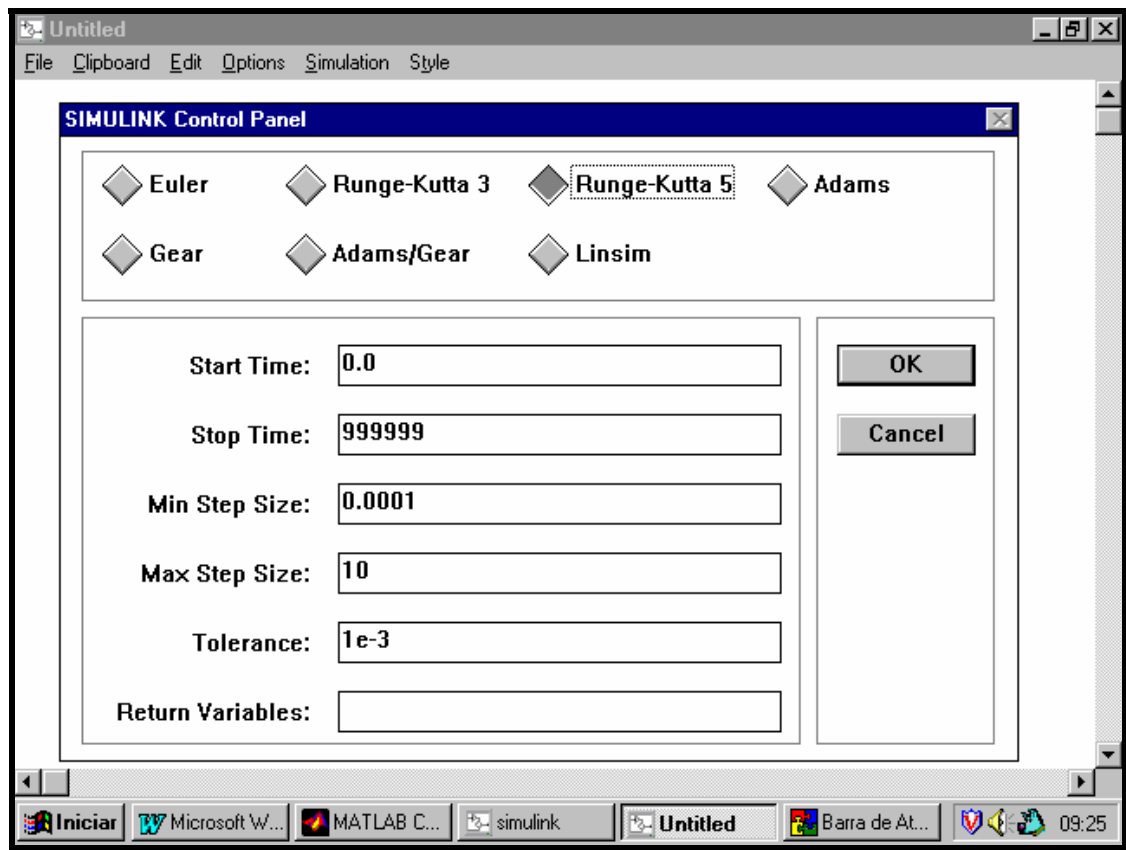
o que vemos no bloco de programa, seguindo o sentido das flexas, o resultado da integração da variável y_1 deve ser multiplicado por um ganho 1 e entrar diretamente para ser integrado na caixa do integrador da segunda variável y_2 , correspondendo a segunda equação diferencial. Da mesma forma o resultado da segunda variável y_2 deve ser multiplicado pelo ganho -1 e entrar direto na caixa de integrador da primeira equação diferencial.

Conforme pode-se observar na figura seguinte, no box onde o programa é feito, existem vários comandos: *File*, *Clipboard*, *Edit*, *Options*, *Simulation* e *Style*.

Em especial e de nosso interesse, o comando *Simulation* é o responsável pela simulação do sistema dinâmico em questão.



Ao escolher a opção *Simulation* um painel de controle abrirá conforme figura a seguir. Nele é possível observar a facilidade de escolher qualquer um dos métodos numéricos com apenas o apertar de um botão. Os métodos numéricos já programados são: Euler, Runge-Kutta de 3^a ordem, Runge-Kutta de 5^a ordem, Adams, Gear, e um método de simulação de sistemas lineares.



Os parâmetros são: o tempo inicial, o tempo final, o tamanho mínimo de passo de integração. O tamanho máximo de passo de integração, a tolerância de erros que se deseja permitir para o método e a escolha de qual variável deseja-se observar.

Então, conforme dito antes, simular sistemas dinâmicos em meio ambiente ou qualquer outra área que não seja de ciência exata torna-se hoje em dia muito simples e acessível para qualquer pesquisador.

5- Modelos Quantitativos

Nos capítulos anteriores foram feitos preparativos no sentido de tornar o leitor mais adaptado às técnicas e programas para uso em modelos dinâmicos que representem sistemas ecológicos. Neste capítulo usaremos todas as técnicas vistas anteriormente de maneira implícita ou explícita.

Quando nos propomos a analisar sistemas dinâmicos, duas grandes áreas tornam-se divisores do estudo. O pesquisador pode concentrar-se modelos quantitativos ou qualitativos.

Modelos qualitativos, analisam sobre um ponto de vista mais amplo, o que acontece com o sistema sob o ponto de vista de estabilidade, convergência, possíveis parâmetros que levem a um comportamento caótico, possíveis condições iniciais não observáveis em comparação com a realidade do fenômeno, etc.

Já uma análise quantitativa, preocupa-se fundamentalmente com os valores obtidos pelas variáveis e parâmetros, preocupa-se com a simulação, preocupa-se com a precisão da previsão de acontecimentos futuros, enfim, basicamente preocupa-se com o aspecto numérico envolvido no sistema dinâmico em questão.

6- Modelos de Crescimento

Crescimento Exponencial

Estes tipos de modelos assumem que a razão de crescimento é proporcional ao valor instantâneo da variável principal responsável pela determinação da população, ou :

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)$$

onde $y(t)$ é o valor da população no instante t e “ r ” é a constante de proporcionalidade. Para uma simples integração podemos encontrar uma expressão analítica para a solução da equação:

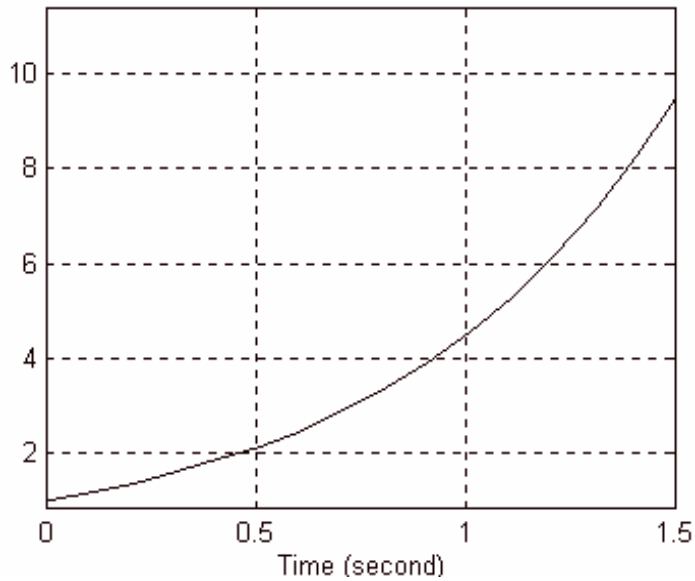
$$y(t) = y(t_0)e^{rt}$$

onde $y(t_0)$ é o valor inicial da população no tempo inicial.

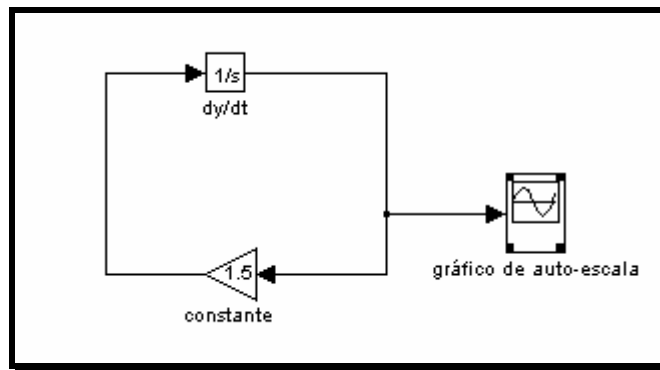
Como exemplo, se $y(t_0) = 1$, podendo representar 1 mil predadores, ou 1 milhão de predadores, ou qualquer outro valor que possa ser representado por 1, e suponhamos $r = 1.5$, a equação anterior torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 1.5y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

e a simulação deste modelo será:



O diagrama de simulação será:



Crescimento Exponencial com Valor Constante

Se for assumido que a razão de crescimento é proporcional a diferença entre o valor instantâneo de $y(t)$ e algum valor assintótico (para onde a solução converge) k , então:

$$\frac{dy(t)}{dt} = r(k - y(t))$$

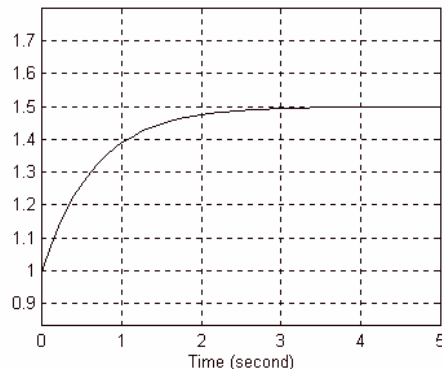
onde “ r ” é a constante de proporcionalidade como já mencionado anteriormente. Separando as variáveis e integrando em relação a t , obtém-se a seguinte função de crescimento:

$$y(t) = k - (k - y(t_0))e^{-rt}$$

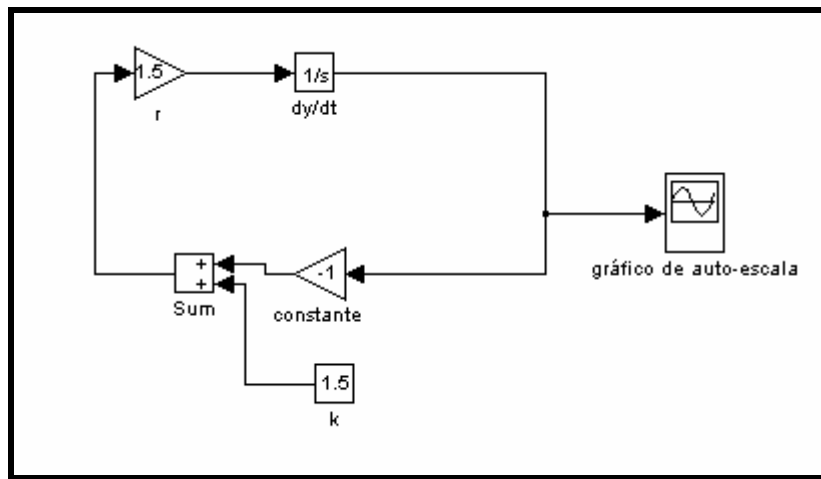
Da mesma forma, assumindo que o valor assintótico será $k = 1.5$, a equação anterior será:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1.5(1.5 - y(t))$$
$$y(0) = 1$$

cujo resultado simulado será:



com o diagrama de simulação



Pode-se observar neste caso que a constante $k = 1.5$ limita o crescimento da população, diferente do modelo anterior que tratava o crescimento como ilimitado. Este modelo se aproxima mais da realidade do que o anterior, onde a constante k faz o papel de um certo controle imposto sobre a situação de crescimento. Este fator pode advir de um controle externo, como influência de política governamental ou mesmo uma limitação de alimento.

Crescimento Logístico

Um dos modelos mais frequentemente utilizado, combina as hipóteses dos dois modelos anteriores, isto é, a razão de crescimento é assumido ser proporcional ao valor instantâneo de $y(t)$ e a diferença entre este valor instantâneo e algum valor assintótico k . A equação será:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)(k - y(t))$$

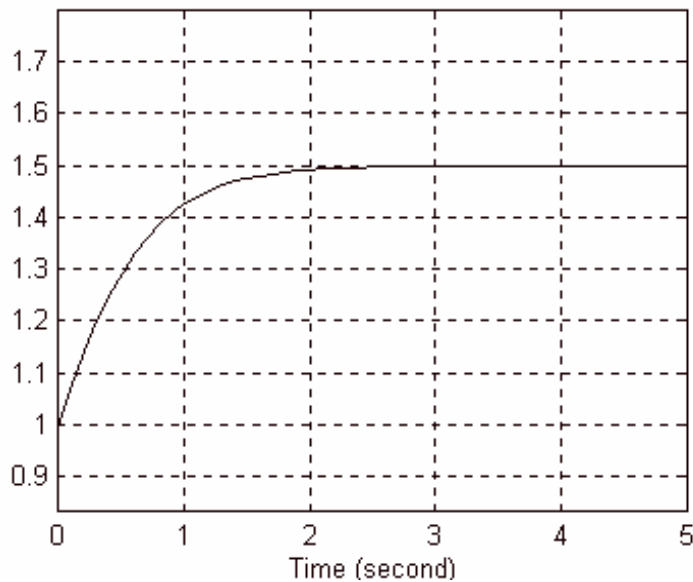
Este modelo é bastante interessante pois o termo $-ry(t)^2$ representa a morte natural da população enquanto o termo $rky(t)$ representa nascimentos ou imigrações de tal forma que aumenta a população. A solução analítica é:

$$y(t) = \frac{ky(t_0)}{y(t_0) + (k - y(t_0))e^{-krt}}$$

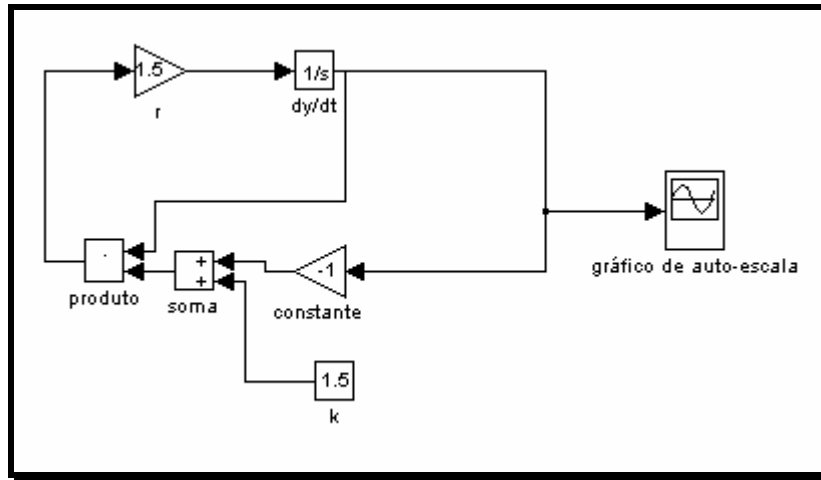
Assumindo as mesmas condições anteriores dos modelos anteriores teremos a equação na forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= 2.25y(t) - 1.5y(t)^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

onde a simulação será:



com o diagrama



Modelo de Crescimento de População em Meio Ambiente Restrito com Competição

Consideremos agora uma população de animais ou de plantas vivendo isoladamente num meio ambiente sem qualquer tipo de intervenção de nenhum outro ser. Assumiremos que o número de nascimentos e mortes em unidade de tempo é aproximadamente proporcional ao número total de indivíduos na população com constantes de proporcionalidade “b” e “d”, respectivamente. Denotaremos $p(t)$ o número de indivíduos de uma população no tempo t :

$$\frac{dp(t)}{dt} = bp(t) - dp(t)$$

Podemos então, chamar de $\varepsilon = b - p$ o que nos leva ao modelo:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \varepsilon p(t)$$

cuja solução analítica nos leva:

$$p(t) = p(t_0)e^{\varepsilon(t-t_0)}, t \geq t_0$$

Pode-se notar que:

- O tempo aumenta em progressão aritmética, enquanto o número total de indivíduos aumenta ou decresce em progressão geométrica, concordando com a lei de Malthus.
- Se $\varepsilon > 0$, $p(t)$ aumenta, isto é, se o número de nascimentos excede o número de mortes, a população aumenta.
- Se $\varepsilon = 0$, $p(t)$ é constante.
- Se $\varepsilon < 0$, $p(t)$ diminui.

Este modelo é o mesmo do crescimento exponencial, porém, a partir de agora não mais nos restringiremos a populações isoladas, mas competindo entre si. Então, teremos duas populações, digamos $p_1(t)$ e $p_2(t)$ lutando pelo mesmo espaço e mesma comida. Uma pode ser a presa e a outra a predadora. O modelo anterior então se transforma:

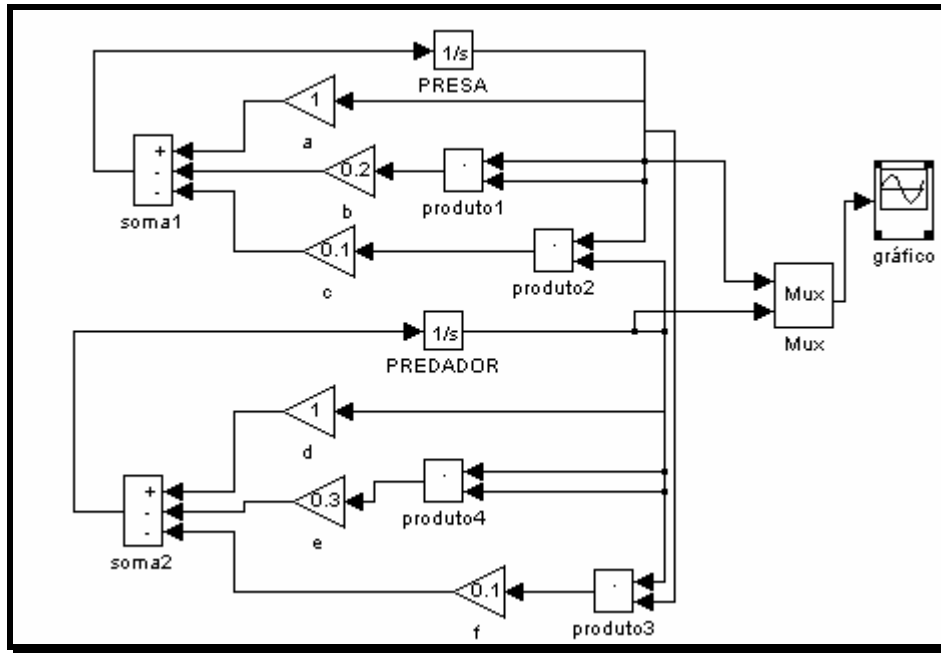
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = ap_1(t) - bp_1^2(t) - cp_1(t)p_2(t)$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = dp_2(t) - ep_2^2(t) - fp_2(t)p_1(t)$$

Este modelo é também conhecido como modelo de *Lotka-Volterra* e consegue exprimir de maneira bastante elaboriosa as relações de inter-dependência entre duas populações. Aqui, os parâmetros “a” e “d” são taxas de crescimento, ou natalidade; “b” e “e” são taxas de mortalidade e os parâmetros “c” e “f” são taxas que apontam a influência de uma população na outra.

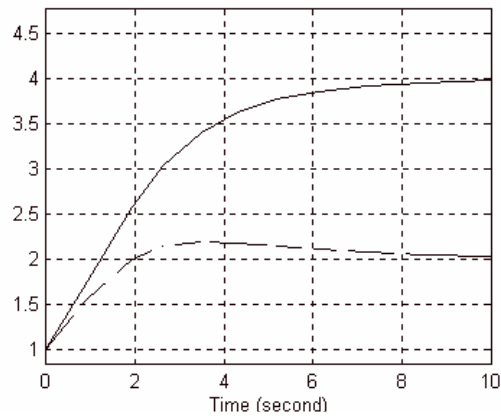
Suponhamos, como exemplo, que duas populações tenham mesmo número de elementos iniciais $p_1(t)$ e $p_2(t)$, porém com a população $p_2(t)$ com taxa de mortalidade maior do que $p_1(t)$ conforme as equações:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = p_1(t) - 0.2p_1^2(t) - 0.1p_1(t)p_2(t)$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = p_2(t) - 0.3p_2^2(t) - 0.1p_1(t)p_2(t)$$
$$p_1(0) = 1$$
$$p_2(0) = 1$$

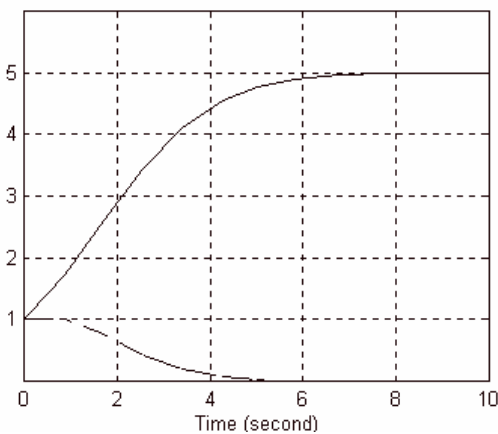
com o diagrama do Simulink:



Tem-se então a seguinte solução gráfica:

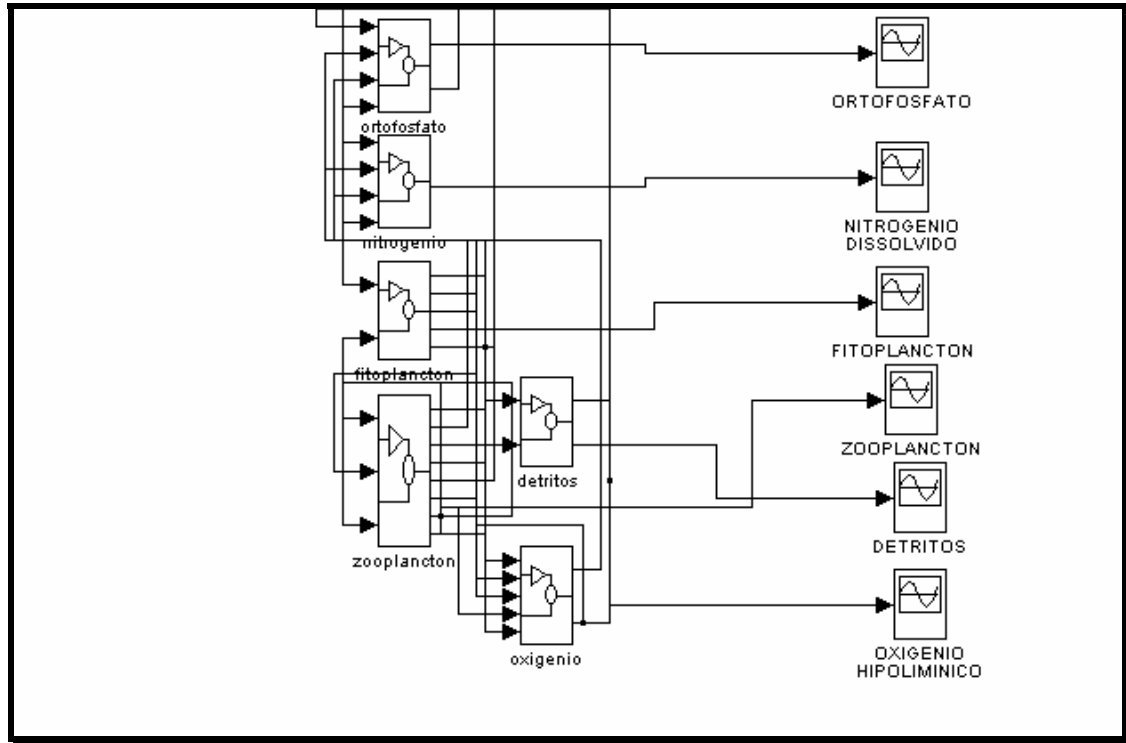


Supondo que a população $p_1(t)$ tem maior influência sobre a população $p_2(t)$, ou seja, $c = 0.1$ e $f = 0.5$



Por ter uma influência maior e um aumento crescente, a população $p_1(t)$ acaba por exterminar a população $p_2(t)$.

O Modelo SALMO



Um modelo interessante para determinação de estado para Lagos e Reservatórios é apresentado por Recknagel^[1] em seu livro. Nele é possível, como apresentado no esquema do Simulink anterior determinar o nível de Ortofosfato, Nitrogênio Dissolvido, Fitoplâncton, Zooplâncton, Detritos e Oxigênio Hipolimínico. É um modelo bastante complexo e abrangente que visa determinação o estado de eutrofização em lagos naturais ou artificiais.

O nome SALMO vem de *Simulation by means of na Analytical Lake Model* e tem como sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dP(t)}{dt} = PIM - PKONS + PREM - PEX + PSF + PFLUX$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = NIM - NKONS + NREM - NEX + NSF + NFLUX$$

$$\frac{dX_1}{dt} = XWA - XSED - XGRAZ - XEX + XFLUX$$

$$\frac{dX_2}{dt} = XWA - XSED - XGRAZ - XEX + XFLUX$$

$$\frac{dZ}{dt} = ZWA - ZMO + ZMIG - ZEX + ZFLUX$$

$$\frac{dD}{dt} = DIM - DSED - DGRAZ - DEX + DFLUX$$

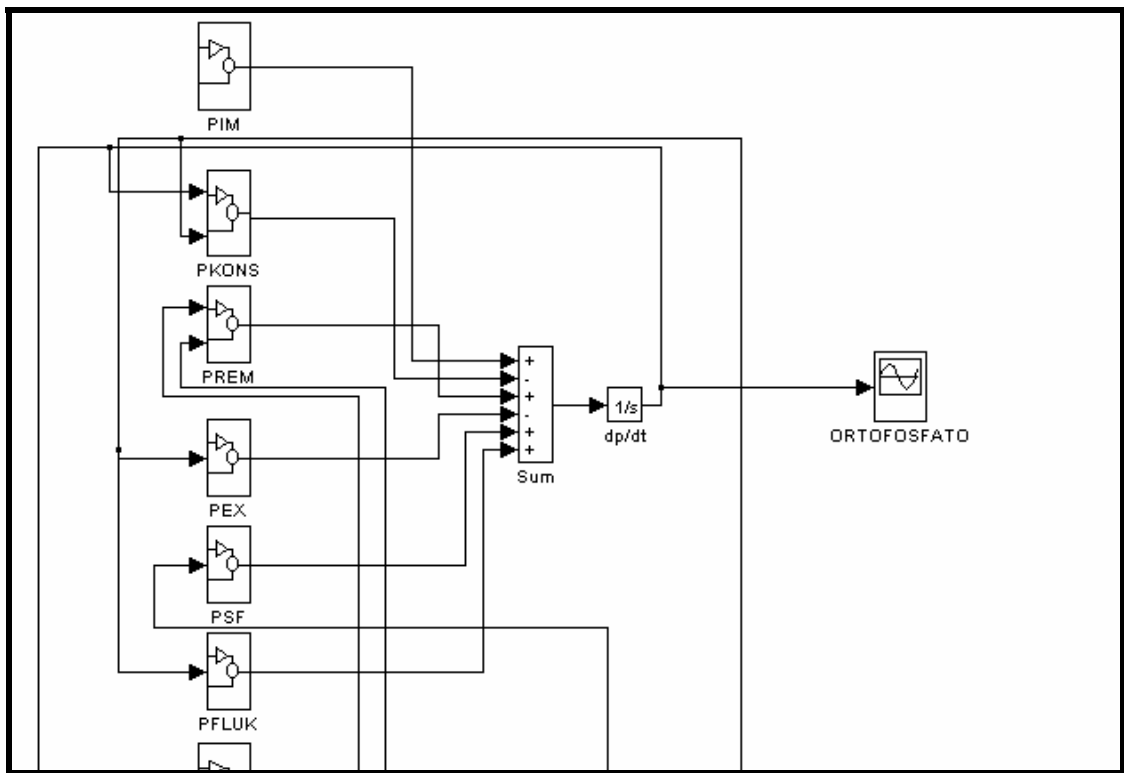
$$\frac{dOH}{dt} = OHPPOD - OHKONS + OHIM - OHEX + OHFLUX$$

onde as variáveis envolvidas são:

PIM	: importação de fósforo
PKONS	: consumo de fósforo
PREM	: remineralização de fósforo
PEX	: exportação de fósforo
NIM	: importação de nitrogênio
NKONS	: consumo de nitrogênio
NREM	: remineralização de nitrogênio
XWA	: crescimento de detritos
XSED	: sedimentação de detritos
XGRAZ	: alisamento
XEX	: exportação
ZWA	: crescimento de zooplâncton
ZMO	: mortalidade de zooplâncton
ZMIG	: migração de zooplâncton
ZEX	: exportação de zooplâncton
DIM	: importação de detritos
DSED	: sedimentação de detritos
DEX	: exportação de detritos

OHPPOD :produção de oxigênio
OHKONS :consumo
OHIM :importação de
OHEX :exportação de oxigênio

as demais variáveis não colocadas com a terminação FLUX indica o fluxo da variável no lago. Observando dentro do diagrama do Simulink vemos que os sistemas estão agrupados por equação diferencial. Assim, por exemplo o grupo de ortofosfato dissolvido contém o seguinte subsistema:



Mais detalhes poderão ser encontrados no texto original de Recknagel. A simulação deste modelo poderá ser verificada no Simulink. Para algumas condições iniciais tomadas como exemplo é possível verificar os seguintes gráficos:

