

# PROCESSOS FILAS

## VIII.1 - Introdução

Congestionamento é um fenômeno natural em sistemas reais. Um serviço torna-se congestionado se há mais pessoas ( informações ) do que o servidor ( ou servidores ) pode atender. As quatro características comuns de tais sistemas são:

(1) *Entrada do Processo*: Alguns fatores precisam de especificações completas tais como, origem da chegada, tipo de chegada e intervalo de tempo das chegadas.

(2) *Mecanismo de Serviço*: As incertezas envolvidas no mecanismo de serviço são: número de servidores; número de clientes atendidos em qualquer tempo; duração do serviço. As variáveis aleatórias são essenciais para representar estas características.

(3) *Disciplina da Fila*: São regras de atendimento do servidor para o cliente tais como: "primeiro a chegar, primeiro atendido", "último chegar, primeiro atendido" e "seleção aleatória de prioridades para o serviço".

(4) *Número de Filas*: Quando há mais de um servidor e o atendimento é executado de forma paralela.

Das quatro características anteriores, vamos simplificar e utilizar apenas três descritas da seguinte forma:

*Distribuição da Entrada / Distribuição do tempo de serviço / número de servidores*

Algumas notações padrões usadas para estas características são:

GI: "general independent" entradas para as distribuições arbitrárias.

M: para distribuição de Poisson ou Exponencial.

D: para um tamanho de tempo de atendimento constante.

$E_k$ : Distribuição Gamma.

Vamos analisar aqui somente os casos onde a entrada é Poisson, o tempo de atendimento é exponencial e há "s" servidores, ou :

M / M / s

O processo estocástico então será modelado pelas seguintes características:

(a) *Número de Clientes no Sistema*:  $Q(t)$  será o número de clientes no sistema ( tamanho da Fila).  $Q(t)$  é contínuo no tempo.

(b) *Tempo de Espera*:  $W(t)$  será o tempo de espera de um cliente na fila.  $W(t)$  é contínuo no tempo.

(c) *Período de Ocupação*: Intervalo entre 2 consecutivos trabalhos atendidos pelo servidor.

## VIII.2 - Um Modelo Geral de Filas

Assumindo-se  $Q(t)$  o número de clientes no sistema no tempo t, e definindo:

$$P_n(t) = P[Q(t) = n]$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) \end{aligned} \quad (\text{VIII.1})$$

onde  $\lambda$  é a taxa de chegada de clientes no período  $\Delta t$  e  $\mu$  a taxa de atendimento do servidor(s) no mesmo período.

As condições iniciais são:

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

Para  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \\ 0 &= -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{VIII.2})$$

rearranjando o primeiro termo de (VIII.2) tem-se:

$$P_1(t) = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0(t) \quad (\text{VIII.3})$$

para  $n = 1$ , o segundo termo de (VIII.2) será:

$$\mu_2 P_2(t) = (\lambda_1 + \mu_1) P_1(t) - \lambda_0 P_0(t) = \lambda_1 P_1(t) \quad (\text{VIII.4})$$

portanto,

$$P_2(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0(t) \quad (\text{VIII.5})$$

Assim, para  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\mu_n P_n(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) \quad (\text{VIII.6})$$

e

$$P_n(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n} P_0(t) \quad (\text{VIII.7})$$

Para obter  $P_0(t)$ , basta lembrar o fato que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1 \quad (\text{VIII.8})$$

portanto,

$$P_0(t) = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n} \right]^{-1} \quad (\text{VIII.9})$$

Então podemos definir que para o período estacionário do processo, teremos:

$$P_0(t) = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n} \right]^{-1} \quad (\text{VIII.10})$$

$$P_n(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n} P_0(t) \quad n > 0 \quad (\text{VIII.11})$$

### VIII.3 - A Fila M/M/1

Considere um sistema de filas no qual as chegadas ocorrem no tempo segundo um processo de Poisson com parâmetro  $\lambda$ . Estes clientes são servidos por um simples servidor e seu tempo de serviço é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída.

A distribuição desta variável aleatória é exponencial com média  $\mu = 1/\mu_c$ , onde  $\mu_c$  é a média do tempo de atendimento do cliente e  $\mu$  é a média da distribuição exponencial do tempo de atendimento. Considerar ainda que os clientes são atendidos na ordem de chegada (o primeiro que chega é o primeiro atendido).

Feita estas considerações, assumimos que:

$$P_n(t) = P[Q(t) = n]$$

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \mu$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) \quad n > 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.12})$$

Vamos definir que a *intensidade de tráfego do sistema* (fator de utilização) será:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \text{Chegada / Serviço} \quad (\text{VIII.13})$$

Conforme visto antes,

$$P_0(t) = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n} \right]^{-1} = [1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots]^{-1} = \frac{1}{(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{1 - \rho} \right)}$$

Então,

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 - \rho && \{\text{probabilidade do sistema estar ocioso}\} \\ P(n>0) &= \rho && \{\text{probabilidade do sistema estar ocupado}\} \end{aligned} \quad (\text{VIII.14})$$

Como antes também,

$$P_n(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n} P_0(t) = \rho^n P_0(t) \quad (\text{VIII.15})$$

Então,

$$P_n(t) = (1 - \rho) \rho^n \quad n \geq 0 \quad (\text{VIII.16})$$

Assim,

$$\boxed{\begin{aligned} P_0(t) &= 1 - \rho \\ P_n(t) &= (1 - \rho) \rho^n \end{aligned}} \quad (\text{VIII.17})$$

Aplicando o limite,  $t \rightarrow +\infty$ , percebe-se que a distribuição de  $P_n(t)$  é geométrica e a média e variância de uma distribuição geométrica são:

$$\begin{aligned} E(P_n(t)) &= \frac{\rho}{1 - \rho} \\ V(P_n(t)) &= \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} \end{aligned} \quad \{\text{número médio de clientes no sistema}\} \quad (\text{VIII.18})$$

e como  $P_n(t) = P[Q(t) = n]$ , podemos escrever:

$$\boxed{\begin{aligned} E(Q(t)) &= \frac{\rho}{1 - \rho} \\ V(Q(t)) &= \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} \end{aligned}} \quad (\text{VIII.19})$$

Assumiremos agora que  $W(t)$  é o *tempo de espera* do cliente já definido antes.  $W(t)$  é dado pela soma de  $n$  variáveis aleatórias as quais são independentemente e identicamente distribuídas, com densidade de probabilidade exponencial

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x > 0 \quad (\text{VIII.20})$$

onde  $x$  é o tempo de espera de cada cliente.

A soma da densidade de probabilidade exponencial é chamada densidade de probabilidade Gamma, da forma:

$$g(x) = e^{-\mu x} \frac{\mu^n x^{n-1}}{(n-1)!} \quad x > 0 \quad (\text{VIII.21})$$

No limite, para  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$F(x) = P(W \leq x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\mu x} \mu^n x^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\text{VIII.22})$$

Temos ainda que,

$$F(0) = P(Q = 0) = 1 - \rho$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dF(x)}{dx} &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho) \rho^n e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} \mu \\ &= \lambda(1-\rho) e^{-\mu x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda(1-\rho) e^{-(\mu-\lambda)x} \\ \frac{dF(x)}{dx} &= \lambda(1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)x} \end{aligned} \quad (\text{VIII.23})$$

mostrando que no limite a distribuição do tempo de espera é também exponencial. A média e variância para o tempo de espera  $W(t)$  pode ser obtido de (VIII.23):

$$\boxed{\begin{aligned} E(W(t)) &= \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \\ V(W(t)) &= \frac{\rho(1-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2} \end{aligned}} \quad (\text{VIII.24})$$

A relação interessante entre a distribuição de Poisson e a Exponencial é que, quando o número de chegadas segue a distribuição de Poisson com média  $\lambda$ , o intervalo entre duas chegadas segue a distribuição exponencial negativa com média  $1/\lambda$ .

### **Exemplo -1 :**

É razoável assumir que chegadas de uma cabine telefônica é um processo de Poisson com média 12 por hora. Uma distribuição exponencial com média 2 minutos é uma boa aproximação para a distribuição do atendimento das chamadas.

(1) Qual a probabilidade de uma chamada encontrar linha ocupada?

*Solução:*

*Seja  $Q$  o tamanho da fila. Sabemos que*

$$P(Q(t) > 0) = 1 - P(Q(t) = 0) = 1 - (1 - \rho) = \rho$$

mas,

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \text{razão de chegada} / \text{razão de atendimento}$$

Temos ainda que um atendimento é feito a cada 2 minutos, então usando regra de três,

$$\begin{array}{l} 1 \text{ atendimento} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 2 \text{ min} \\ x \quad \quad \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 60 \text{ min} \end{array}$$

chegando a  $\mu = 30$  atendimentos em 1 hora. Logo,

$$P(Q(t) > 0) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0.4$$

(2) Qual é o tamanho médio da fila quando ela é formada?

Solução:

$$E(Q(t)|Q(t)>0) = \frac{E(Q(t))}{P(Q(t)>0)} = \frac{\frac{\rho}{(1-\rho)}}{\rho} = \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{0.6} = 1.67$$

(3) A companhia telefônica deseja instalar outra cabine se o tempo de espera de cada cliente for superior a 3 minutos. De quanto deve aumentar as chegadas à central para justificar a segunda cabine?

Solução:

$$E(W(t)) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \geq 3$$

para encontrar a taxa de atendimento  $\mu$  basta uma regra de três, onde

$$\begin{array}{l} 1 \text{ atendimento} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 2 \text{ min} \\ \mu \quad \quad \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 1 \text{ min} \end{array}$$

sendo portanto,  $\mu = 0.5$ .

Então:

$$\frac{\lambda}{0.5(0.5-\lambda)} \geq 3 \quad (\Rightarrow) \quad \lambda \geq 0.3$$

ou seja, o número médio de chamadas é de 0.3 por minuto. Em uma hora serão

$0.3 \times 60 = 18$  chamadas.

Logo, para a nova cabine ser instalada, deverá aumentar de 6 o número de chamadas por hora.

#### VIII.4 - A Fila M/M/s

Ao contrário do item anterior, agora temos um número "s" de servidores ( $s \geq 1$ ), ou seja, o sistema agora trabalha em paralelo e independentemente. As chegadas são um processo de Poisson com parâmetro  $\lambda$  e o tempo de serviço exponencial com média  $\mu_c = 1/\mu$ . Então  $\mu = 1/\mu_c$  e o modelo será:

$$\mu_n = \begin{cases} s \cdot \mu & n \geq s \\ n \cdot \mu & n < s \end{cases} \quad (\text{VIII.25})$$

onde o primeiro termo indica o número de clientes maior que servidores e o segundo número de clientes menor que servidor. Assim, como visto antes sendo:

$$P_n(t) = P[Q(t) = n]$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) \quad 0 \leq n < s \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -(\lambda + s\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + s\mu P_{n+1}(t) \quad n \geq s \end{aligned} \quad (\text{VIII.26})$$

da mesma forma a segunda equação é quando o número de clientes é menor que servidor e a terceira equação quando número de clientes maior que servidor. Para este caso, a intensidade de tráfego será:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \quad (\text{VIII.27})$$

Para o regime estacionário  $dP(t)/dt = 0$ , têm-se as equações:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \left[ \left( \sum_{r=0}^s \frac{(s\rho)^r}{r!} \right) + \frac{\rho^{s+1} \cdot s^s (1-\rho)^{-1}}{s!} \right]^{-1} \\ P_n(t) &= \frac{s^s \cdot \rho^n \cdot P_0(t)}{s!} \quad (n \geq s) \\ P_n(t) &= \frac{(s \cdot \rho)^n \cdot P_0(t)}{n!} \quad (n < s) \end{aligned} \quad (\text{VIII.28})$$



O tamanho médio da fila no caso M / M / 2 é:

$$\boxed{E(Q(t)) = \frac{\rho \cdot P_s(t)}{(1-\rho)^2}} \quad (\text{VIII.29})$$

e o tempo de espera médio

$$\boxed{E(W(t)) = \frac{P_s(t)}{s \cdot \mu \cdot (1-\rho)^2}} \quad (\text{VIII.30})$$

### Comparação entre M / M / 2 e M / M / 1 com mesmo $\rho$

Para M / M / 2:  $E(Q_2(t)) = \frac{2\rho}{(1+\rho)(1-\rho)}$  (VIII.31)

Para M / M / 1:  $E(Q_1(t)) = \frac{\rho}{1-\rho}$  (VIII.32)

Então, comparando as 2 médias:

$$E(Q_2(t)) - E(Q_1(t)) = \frac{2\rho}{(1+\rho)(1-\rho)} - \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho}{1+\rho} > 0 \quad (\text{VIII.33})$$

ou seja, momentaneamente, com mesma intensidade de tráfego, um sistema com simples servidor resulta em menor tamanho de fila esperado do que 2 servidores.

### Exemplo - 2:

Um supermercado tem 3 caixas. O tempo de serviço para cada cliente é exponencial com média 5 minutos e pessoas chegam num processo de Poisson com razão 30/hora.

(1) Qual a probabilidade dos caixas estarem ocupados?

$$s = 3$$

$$\mu_c = 5$$

$$\mu = \frac{1}{\mu_c} = \frac{1}{5}$$

$$\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

Então a intensidade de tráfego será:

$$\rho = \frac{\frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$$

então a probabilidade,

$$P[(Q(t) \geq 3)] = 1 - P_0(t) - P_1(t) - P_2(t)$$

$$P_0(t) = \frac{4}{89}; \quad P_1(t) = \frac{10}{89}; \quad P_2(t) = \frac{25}{178}; \quad P_3(t) = \frac{125}{1068}$$

Logo,

$$P[(Q(t) \geq 3)] = \frac{625}{1068} = 0.585 \text{ ou } 58.5\%$$

(2) Qual o número médio de pessoas esperando para serem atendidas?

$$E(Q(t)) = \frac{\rho \cdot P_3(t)}{(1 - \rho)^2} = 3.51$$

(3) Qual o tempo médio de espera dos clientes?

$$E(W(t)) = \frac{P_3(t)}{3 \cdot \frac{1}{5} (1 - \rho)^2} = 7.02 \text{ minutos.}$$

### **Exemplo 3:**

Um laboratório tem dois computadores servidores de equivalente capacidade. Cálculos que chegam aos computadores tem um tempo de serviço de atendimento exponencial com média 3 minutos. Os trabalhos são de dois tipos: Universitários e Externos. Os trabalhos Universitários chegam ao laboratório na razão de 18/hora e Externos 15/hora. É vantagem utilizar um computador exclusivamente para trabalhos Universitários e outro para os Externos?

*Solução:*

*Considerando cada computador individual, como simples servidor:*

Para W1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{18}{60} = 0.3 \\ \mu_c = 3 \\ \mu = \frac{1}{\mu_c} = \frac{1}{3} \\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{10} \end{array} \right.$$

então,

$$E(W_1(t)) = \frac{9/10}{1/3(1-9/10)} = 27 \text{ minutos}$$

Para W2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{15}{60} = 0.25 \\ \mu = \frac{1}{3} \\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

$$E(W_2(t)) = \frac{3/4}{1/3 \cdot 1/4} = 9 \text{ minutos}$$

Quando os dois computadores W1 e W2 estão trabalhando juntos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0.3 + 0.25 = 0.55 \\ \mu = \frac{1}{3} \\ \rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{11}{20} \cdot \frac{3}{2} = \frac{33}{40} \end{array} \right.$$

$$P_0(t) = \frac{7}{73}; \quad P_2(t) = \frac{7623}{58400};$$

Logo,

$$E(W(t)) = E(W_1(t) + W_2(t)) = 6.45 \text{ minutos.}$$

Claramente é muito melhor trabalhar num sistema com duplo servidores do que 2 computadores isolados.

### VIII.5 - Números Pseudo-Aleatórios

Nesta seção, vamos introduzir o leitor à geração de números ditos pseudo-aleatórios, para a partir de então utilizá-los na simulação de redes. Os números pseudo-aleatórios, são assim denominados uma vez que, a partir de um número aleatório é criada uma regra de formação nos quais esses novos números são gerados. Serão citados, em particular para utilização futura, dois métodos de geração de números pseudo-aleatórios:

- *Método do Quadrado Médio.*
- *Método da Congruência Multiplicativa.*

#### Método do Quadrado Médio

A regra de formação para os números pseudo-aleatórios neste caso é :  
Tomar "m" dígitos intermediários do quadrado do número anterior da série  $(x_{n-1})^2$  de 2m dígitos.

Vamos emprestar o seguinte exemplo sugerido no livro "GPSS - Modelagem e Simulação de Sistemas" [1]:

Considerando  $x_0 = 2387$  então  $m = 4$ . Elevando ao quadrado,  $x_0^2 = 05697769$ .  
Então, tomado-se os quatro algarismos centrais:  $x_1 = 6977$ , seguindo-se sucessivamente:

$x_0 = 2387$	$x_0^2 = 05697769$
$x_1 = 6977$	$x_1^2 = 48678529$
$x_2 = 6785$	$x_2^2 = 46036225$
$x_3 = 0362$	$x_3^2 = 00131044$
$x_4 = 1310$	.....

A variação do número gerado, vai de 0 até m dígitos 9, ou seja:

- $m = 2$           número pseudo-aleatório [0 ; 99]
- $m = 3$           número pseudo-aleatório [0 ; 999]
- $m = 4$           número pseudo-aleatório [0 ; 9999]

e assim sucessivamente. Para colocar o número gerado sempre dentro do intervalo [0;1], basta dividi-lo pelo máximo número que pode ser gerado. Assim,

$$x_1 = \frac{6977}{9999} = 0.6978$$

$$x_2 = \frac{6785}{9999} = 0.6786$$

$$x_3 = \frac{0362}{9999} = 0.0362$$

$$x_4 = \frac{1310}{9999} = 0.1310$$

*Efetuada esta mudança para o intervalo [0 ; 1], podemos então utilizá-lo em funções de distribuições de probabilidades.*

### Método da Congruência Multiplicativa

A relação de congruência de uma seqüência de números  $x_i$  inteiros não negativos, menores que  $M$  é:

$$x_{n+1} = k \cdot x_n \pmod{M}$$

onde

$M$ : número inteiro;

$k$  : inteiro entre zero e  $M$ .

$x_0$  : inteiro entre zero e  $M$ .

Este método apresenta a desvantagem da seqüência gerada se repetir após  $M$  passos. Sendo assim, a seqüência tem um período  $M$  de repetições, que nos obriga a iniciar com valores altos para  $M$ .

Como exemplo, novamente tomaremos o livro " GPSS - Modelagem e Simulação de Sistemas":

Para  $k = 7$ ,  $x_0 = 27$  e  $M = 256$ , têm-se:

$$x_1 = 7 \cdot 27 \pmod{256} = 189$$

$$x_2 = 7 \cdot 189 \pmod{256} = 43$$

$$x_3 = 7 \cdot 43 \pmod{256} = 45$$

$$x_4 = 7 \cdot 45 \pmod{256} = 59$$

.....

Da mesma forma que o método anterior, a variação dos números gerados vai de zero a  $M-1$ . A mudança neste caso para o intervalo  $[0;1]$ , é feita através da divisão do número por  $M-1$ . Assim,

$$x_1 = \frac{189}{255} = 0.74$$

$$x_2 = \frac{43}{255} = 0.17$$

$$x_3 = \frac{45}{255} = 0.18$$

$$x_4 = \frac{59}{255} = 0.23$$

Os números  $M$ , normalmente são utilizados da forma  $M = p^q$ . Neste caso,  $p$  pode ser considerado como número de dígitos do sistema de numeração e  $q$  o número de dígitos da palavra do computador. Como as palavras são 8, 16 ou 32 *bits* e a numeração neste caso é binária, os valores de  $M$  podem assumir  $2^8, 2^{16}, 2^{32}$ .

Um outro fator importante que o leitor não pode esquecer, é a relação de congruência entre dois números. Dizemos então, que um número  $x$  é congruente a um número  $y$  módulo  $M$ :

$$x \equiv y \pmod{M}$$

se

$$(x-y) \text{ é divisível por } M.$$

Esta função módulo é fácil de ser encontrada em qualquer linguagem computacional. Como exemplo:

$$34 \equiv 10 \pmod{3}$$

uma vez que  $(34 - 10) = 24$  é divisível por 3.

## **VIII.6 - Simulação de Distribuições de Probabilidades**

Na seção anterior, verificamos como gerar números pseudo-aleatórios entre 0 e 1. Nesta seção, estes números serão utilizados para encontrar os valores para as

distribuições acumuladas de probabilidades, de fundamental importância na simulação de filas.

### Simulação para Distribuição Uniforme

Detalhes desta distribuição foram fornecidos no capítulo II, de revisão da teoria de probabilidades, e não serão repetidos nesta seção. A função densidade de probabilidade para a Distribuição Uniforme num intervalo  $[a,b]$  é:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{para } x \in [a,b].$$

A distribuição acumulada pode ser encontrada da seguinte forma:

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy = \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{y}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

Logo, temos que  $x$  será gerado com distribuição uniforme se:

$$x = a + (b-a).F(x)$$

onde  $F(x)$  é assumido como um número pseudo-aleatório, gerado entre 0 e 1, com por exemplo, um dos dois métodos introduzidos na seção anterior.

### Simulação para Distribuição Exponencial

A função densidade neste caso é :

$$f(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x}$$

para  $\alpha > 0$  e  $x \in [0, \infty)$

e  $f(x) = 0$

caso contrário, ou seja,  $x \leq 0$ . A função distribuição acumulada, pode ser encontrada através de:

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy = \int_0^x \alpha \cdot e^{-\alpha y} dy = 1 - e^{-\alpha x}$$

Isolando  $x$ , temos:

$$x = -\frac{1}{\alpha} \ln (1 - F(x))$$

Pode-se lembrar que a média da distribuição exponencial é  $1/\alpha$  e que  $F(x)$  varia no intervalo  $[0,1]$ . Assim,  $(1-F(x))$  também varia no intervalo  $[0,1]$  e a fórmula para encontrar  $x$  debaixo da distribuição exponencial será:

$$x = -\mu \ln(F(x))$$

onde  $F(x)$  é um número pseudo-aleatório.

### Simulação para Distribuição Normal

Como já foi visto a função densidade de probabilidade da distribuição Normal é:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-\mu)^2 / 2\sigma^2} \quad \text{onde } -\infty < x < \infty$$

e  $\mu$  é a média e  $\sigma$  o desvio padrão. Para normalizar os valores obtidos por  $x$ , basta fazer:

$$z = \frac{y - \mu}{\sigma}$$

onde a média  $\mu$  é zero e o desvio padrão  $\sigma$  é 1. A função densidade então será:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

que é uma função tabulada. A função densidade acumulada é :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

Uma maneira bem simples de encontrar um número com distribuição normal, é utilizar a seguinte fórmula:

$$z = (F(x) - 0,5) \cdot \sigma + \mu$$

onde  $F(x)$  é a soma de 12 números uniformemente distribuídos.

### Simulação para Distribuição de Poisson

A função de distribuição de probabilidade de Poisson é:

$$P(x = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

onde  $\lambda$  é a média e  $k = 1, 2, 3, \dots$ . A distribuição acumulada será:

$$F(x) = \sum_{i=0}^x P(x = i)$$

A forma de geração de números com distribuição de Poisson será:

1) Buscar  $F(x)$ , número aleatório normalmente distribuído com média zero e variância 1.



2) Calcular  $x_{n+1} = \lambda - 0.5 + \sqrt{\lambda}F(x_n)$ . Este número terá distribuição de Poisson com média  $\lambda$ .

Exemplo4:

Vamos gerar 20 números com distribuição Exponencial e de Poisson e comparar as probabilidades "reais" geradas pelos simuladores com as probabilidades "teóricas", através das leis de probabilidades. Para tanto, para os seguintes números gerados:

<b>Poisson</b>	<b>Exponencial</b>
23.23	5.42
24.83	4.22
24.57	5.03
23.42	4.96
21.57	8.65
22.87	41.38
22.51	41.48
22.42	8.57
21.64	9.69
23.71	30.01
21.87	31.70
20.92	4.56
22.07	89.83
21.96	50.00
23.06	6.15
22.30	2.63
24.87	43.84
24.10	18.66
21.33	60.49
24.37	23.89

**MÉDIA:**      22.88                      24.56

Qual a diferença entre a simulação e a probabilidade teórica? Vamos então montar a tabela de classes para efeito de comparação das duas probabilidades. Primeiramente

temos que montar o *rol* dos números, ou seja, colocá-los em ordem crescente ou decrescente. Escolhemos a ordem crescente para a distribuição exponencial. Então,

2.63 4.22 4.56 4.96 5.03 5.42 6.15 8.57 8.65 9.69 18.66 23.89 30.01 31.70 41.38  
41.48 43.84 50 60.49 89.83

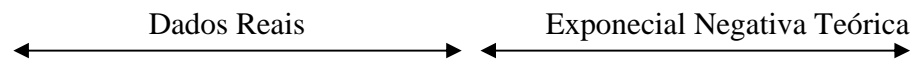
Posteriormente calculamos a amplitude para estes dados, ou seja, a diferença entre o maior dado e o menor, que neste caso será:

$$R=87.52$$

Após isto, calculamos a amplitude das classes, que é encontrada dividindo-se a amplitude dos dados pelo número de classes desejado. Neste caso, vamos escolher n=5 classes. Então,

$$h = \frac{87.52}{5} = 17.44$$

Partindo-se do primeiro dado, montamos a tabela de classes, que será:



classes	Freq. absoluta	Freq. relativa	probabilidade	Freq. absoluta
2.63 ----20.00	11	0.55	0.4555	9.11
20.00 ----37.51	3	0.15	0.2258	4.51
37.51 ----54.95	4	0.2	0.1108	2.21
54.95 ----72.39	1	0.05	0.054	1.08
72.39 ----89.83	1	0.05	0.026	0.52

Como já foi calculado, a média da distribuição exponencial foi T=24.56. A distribuição exponencial negativa é governada pela fórmula:

$$P(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

A probabilidade de t estar compreendido entre intervalos de pontos é facilmente calculado, uma vez que,

$$P(t_1 \leq t \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} dt = -e^{-\frac{t}{T}} \Big|_{t_1}^{t_2} = e^{-\frac{t_1}{T}} - e^{-\frac{t_2}{T}}$$

Assim, a penúltima coluna da tabela de classes foi montada da seguinte forma:

Probabilidade Exponencial Teórica

$$P(2.63 \leq t \leq 20) = e^{-\frac{2.63}{T}} - e^{-\frac{20}{T}} = 0.4555$$

$$P(20 \leq t \leq 37.51) = e^{-\frac{20}{T}} - e^{-\frac{37.51}{T}} = 0.2258$$

$$P(37.51 \leq t \leq 54.95) = e^{-\frac{37.51}{T}} - e^{-\frac{54.95}{T}} = 0.1108$$

$$P(54.95 \leq t \leq 72.39) = e^{-\frac{54.95}{T}} - e^{-\frac{72.39}{T}} = 0.054$$

$$P(72.39 \leq t \leq 89.83) = e^{-\frac{72.39}{T}} - e^{-\frac{89.83}{T}} = 0.026$$

Multiplicando agora esses valores pela quantidade de dados, obteremos a última coluna da frequência absoluta teórica. Podemos ver que os valores são bem próximos do simulado, o que atesta a boa performance do simulador.

**VIII.7 - Simulação de Filas**

A Figura VIII.1 mostra as variáveis necessárias para a simulação e análises de filas com um servidor. As variáveis que podem ser observadas são:

- *Volume de Chegada*: Número de clientes ou processos que chegam em determinado tempo.
- *Intervalo entre Chegadas*: Intervalo de tempo entre o fim da chegada do último processo e o início do novo processo. O pior caso é considerar esse tempo com distribuição exponencial.

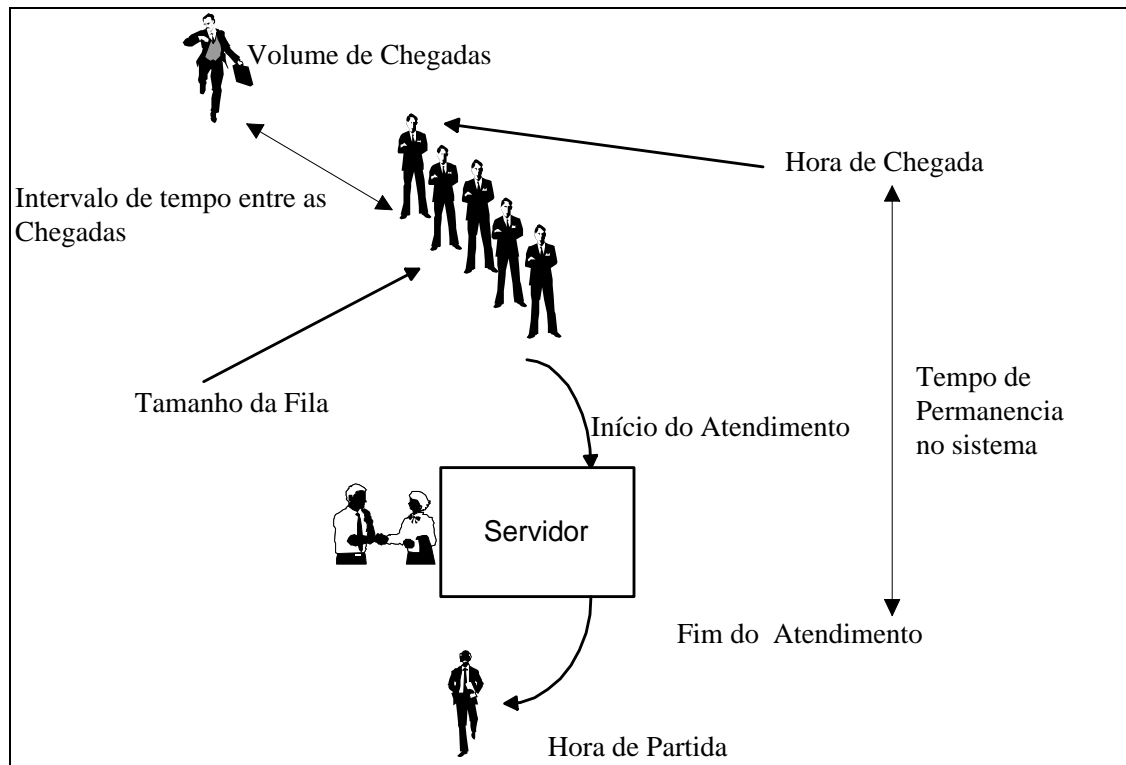


Figura VIII.1 - Simulação de Filas

- *Hora de Chegada*: A hora em que o processo chegou na fila.

- *Início do Atendimento*: É o máximo valor entre a hora de chegada do processo  $n$  e fim do atendimento do processo  $(n-1)$ . O pior caso é o atendimento com distribuição uniforme quando o intervalo tem distribuição exponencial.

- *Fim do Atendimento*: É o início do atendimento somado ao tempo de duração diminuído de uma unidade de tempo. Se o tempo é em minutos com uma casa decimal, então a unidade de tempo é 0.1 min., se for 2 casas decimais a unidade de tempo é 0.01 min.

- *Tempo de Permanência*: É o fim do atendimento menos o tempo de chegada.

Como exemplo vamos supor um modelamento de tal forma que o sistema não comporte o volume de chegadas e conseqüentemente surgem filas. Assim, por exemplo:

*Tempo de Chegada*: Distribuição Exponencial com média  $\mu = 13$  min.

Números pseudo-aleatórios pelo método da congruência multiplicativa.

Semente:  $x_1 = 27$  {O volume de chegadas é o número aleatório}

*Tempo de Atendimento*: Distribuição Uniforme no Intervalo [15 min.;17min.]

Números pseudo-aleatórios pelo método dos quadrados médios.

Semente:  $xa_1 = 5161$

$M = 2^8$ .

$k = 7$ .

As Figuras VIII.2 a VIII.6 apresentam a situação do sistema por cerca de 20 horas. Em especial, a Figura VIII.5 apresenta o tempo de permanência sempre em curva ascendente mostrando um colapso total, e conseqüentemente, um aparecimento de filas incontrolável.

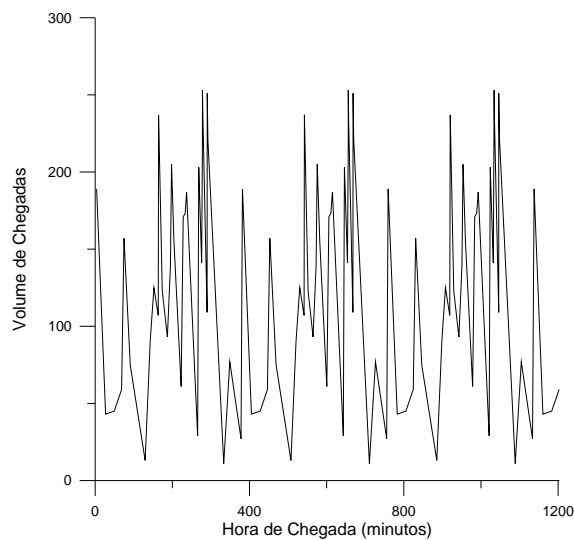


Figura VIII.2 - Volume de Chegadas

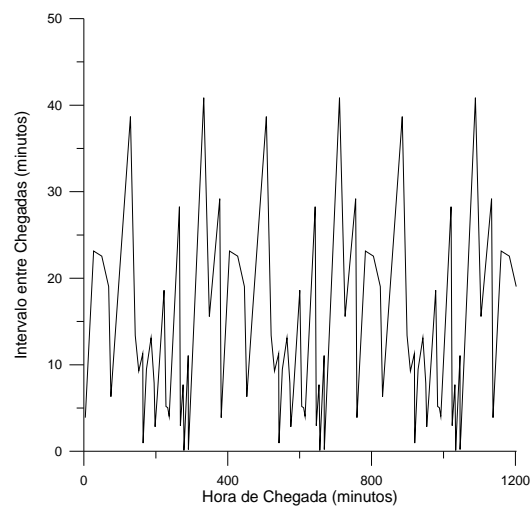


Figura VIII.3 - Intervalo de Tempo nas Chegadas

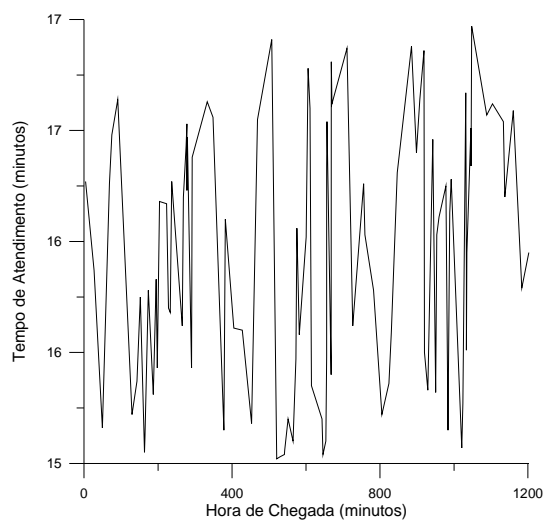


Figura VIII.4 - Tempo de Atendimento

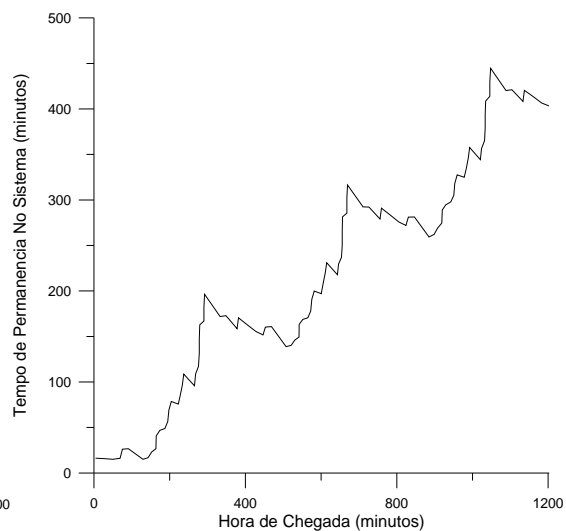


Figura VIII.5 - Tempo de Permanência no sistema

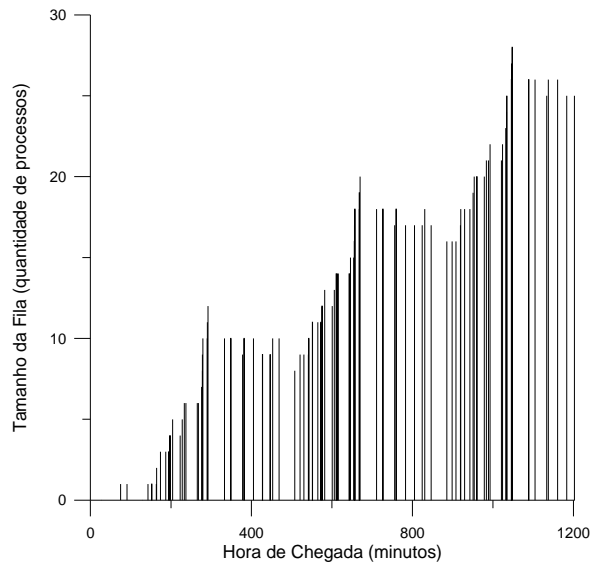


Figura VIII.6 - Tamanho da Fila para  $\mu = 13$ .

A tabela a seguir mostra uma pequena parte das simulações apresentadas nos gráficos das Figuras VIII.2 a VIII.6 e o desempenho numérico das variáveis.

nº	vol.	int.cheg.	hor.ch.	dur.	inic.atend.	hor.part.	temp.perm.	tam. fila
1	189	3.89	3.89	16.27	3.89	20.07	16.17	0
2	43	23.14	27.03	15.87	27.03	42.81	15.77	0
3	45	22.55	49.58	15.16	49.58	64.64	15.06	0
4	59	19.03	68.61	16.26	68.61	84.77	16.16	0
5	157	6.31	74.92	16.48	84.77	101.05	26.14	1
6	75	15.91	90.83	16.64	101.05	117.49	26.67	1
7	13	38.69	129.52	15.22	129.52	144.64	15.12	0
8	91	13.40	142.91	15.37	144.64	159.80	16.89	1
9	125	9.27	152.18	15.75	159.80	175.35	23.17	1
10	107	11.29	163.47	15.05	175.35	190.20	26.73	1
11	237	0.95	164.42	15.12	190.20	205.13	40.70	2
12	123	9.48	173.90	15.78	205.13	220.71	46.80	3
13	93	13.11	187.01	15.31	220.71	235.82	48.80	3
14	139	7.89	194.90	15.83	235.82	251.45	56.54	3
15	205	2.84	197.74	15.43	251.45	266.68	68.94	4
16	155	6.47	204.21	16.18	266.68	282.65	78.44	5
17	61	18.60	222.81	16.17	282.65	298.62	75.82	4
18	171	5.19	228.00	15.70	298.62	314.13	86.13	5
19	173	5.04	233.05	15.68	314.13	329.61	96.56	6
20	187	4.03	237.08	16.27	329.61	345.68	108.60	6

Tabela VIII.1 - Simulação de Filas

Vamos supor que, ao invés de 13 minutos, a média do tempo de chegada suba para  $\mu = 17$ , ou seja, o sistema fica mais adequado ao volume de chegadas.

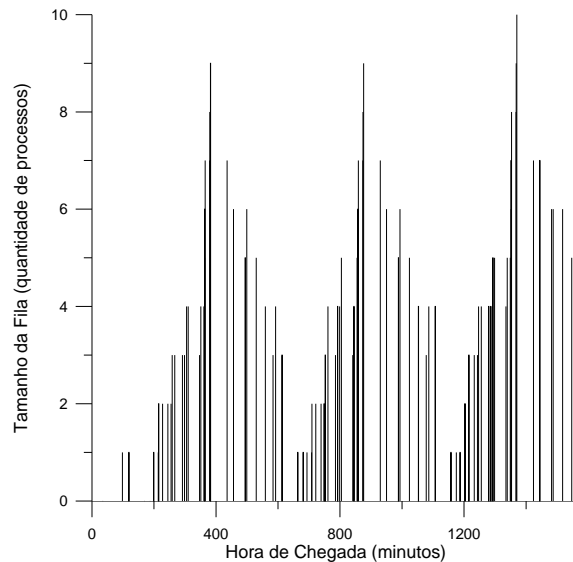


Figura VIII.7 - Tamanho da fila para  $\mu = 17$

Agora, a Figura VIII.7 mostra ao contrário da Figura VIII.5, um sistema em que o tamanho das filas é controlável, pois o tempo de chegada de processos são inferiores à média de atendimento.

Na verdade, para sistemas congestionados, a saída imediata é o alocamento de mais servidores, aumentando a velocidade de atendimento em relação ao volume de chegadas. Como foi visto na Figura VIII.6, o sistema fica congestionado quando a média de chegada é de  $\mu = 13$  minutos e o atendimento entre 15 e 17 minutos.

Uma nova simulação pode ser realizada supondo-se que ao invés de um servidor o sistema possui dois servidores. A Figura VIII.8 mostra o desempenho comparativo entre os dois tipos de sistemas. O tamanho da fila como pode-se perceber reduz drasticamente quando dois servidores são colocados a operar em lugar de um. Neste caso os dois servidores foram supostos tendo a mesma distribuição uniforme com atendimento entre 15 a 17 minutos.

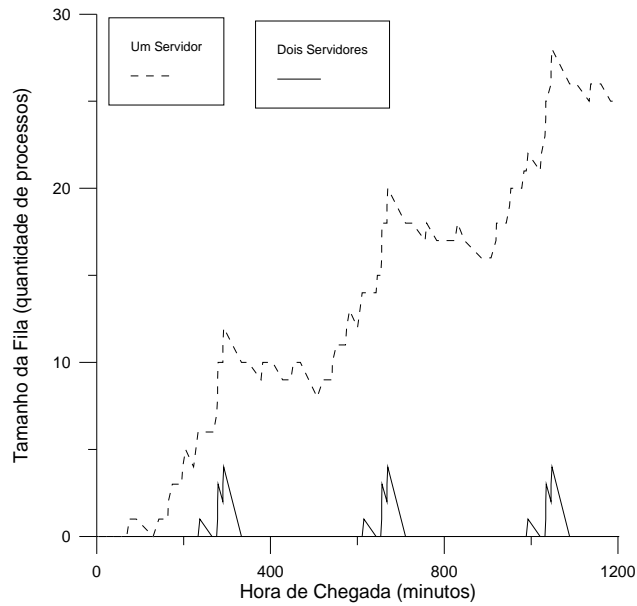


Figura VIII.8 - Filas com Dois Servidores

Um outro cenário é quando o sistema possui diferentes tipos de equipamentos, os quais trabalham com velocidades diferentes. Um exemplo simulado é apresentado na Figura VIII.9 onde um servidor trabalha com distribuição uniforme com tempo de 15 a 17 minutos e o outro trabalha com distribuição uniforme com tempo de 25 a 30 minutos.

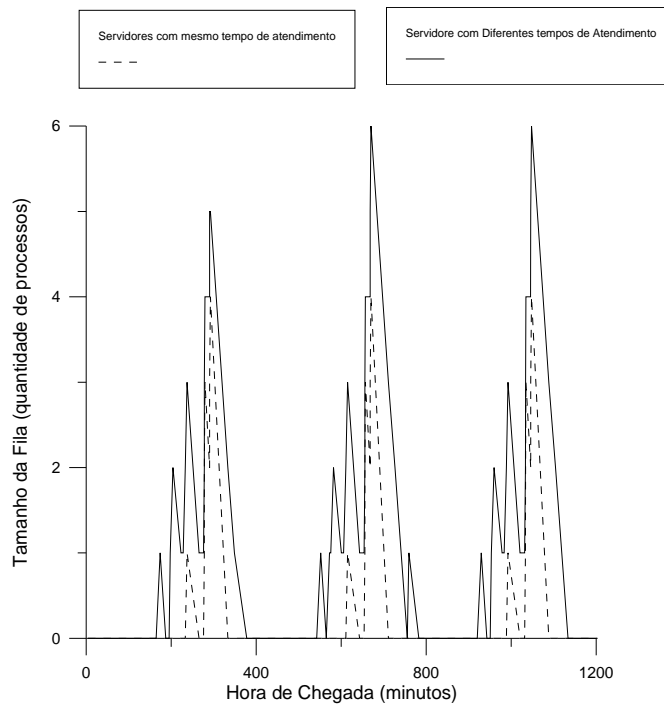


Figura VIII.9 - Servidores com Tempo de Atendimento Diferentes



O resultado, como era de se esperar, é uma fila de espera maior do que quando os dois servidores tem mesma capacidade de atendimento, porém a fila resultante ainda é muito menor do que quando o sistema possui apenas um servidor.

Como comparação entre a simulação e a análise da teoria de Filas apresentadas no início deste capítulo, tomaremos as equações (VIII.1) com  $n = 10$ , ou seja, desejamos fazer uma análise para um tamanho de fila com 10 processos na espera.

O sistema será assumido onde as chegadas ocorrem segundo um processo de Poisson com parâmetro  $\lambda = 0.1$  e atendimento segundo distribuição exponencial com média  $\mu = 0.74$ . Ou seja, os processos chegam num intervalo de tempo de 0.1 minutos e são atendidos em 0.74 minutos.

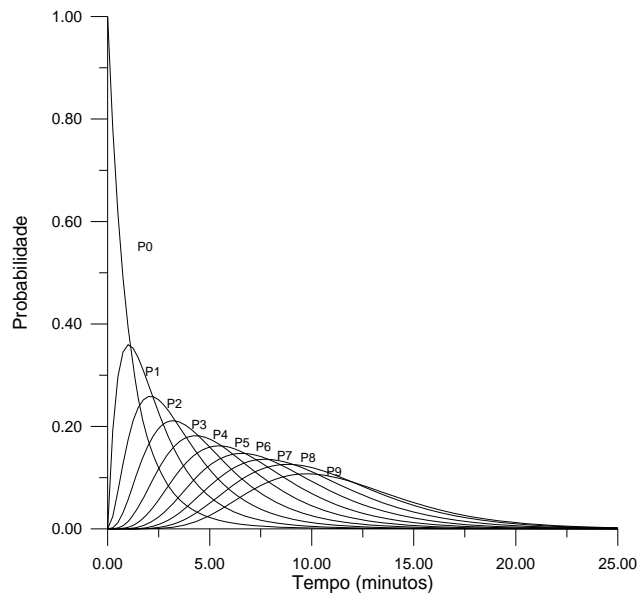


Figura VIII.10 - Análise da Probabilidade do Tamanho da Fila.

A Figura VIII.10 apresenta o resultado onde, percebe-se que quanto mais o tempo passa a probabilidade da fila aumentar também aumenta. Assim, por exemplo, depois de 10 minutos, o tamanho mais provável da fila é acima de 9 processos.

Observando o resultado da simulação na Figura VIII.11, percebe-se a concordância entre a teoria de filas e o resultado observado.

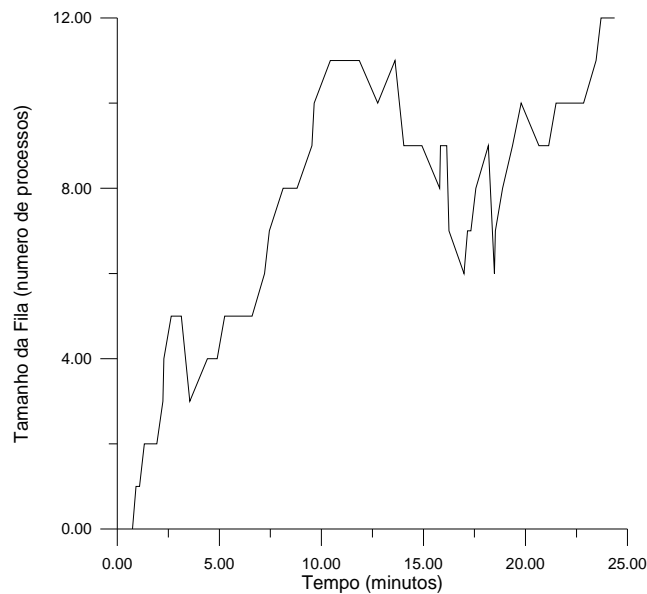


Figura VIII.11 - Simulação de Filas

Pela Figura VIII.11, confirma-se o que pode ser observado na Figura VIII.10, onde esperava-se um tamanho de fila acima de 9 processos, o que realmente ocorre. A Figura VIII.10 pode ser obtida através da integração numérica das equações VIII.1 utilizando integrador de Runge-Kutta de quarta ordem com os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  já fornecidos.

### VIII.8 - O Método de Monte Carlo

Nas seções anteriores foi descrito como simular números regidos pelas diversas distribuições de probabilidades. A filosofia disto é que ao gerar números que são regidos pela distribuição adequada, poderemos simular certos eventos na natureza com grau de precisão maior do que outros métodos determinísticos.

Uma maneira de simular eventos, principalmente aqueles com dinâmica estocástica é utilizar o método de Monte Carlo. Os passos para seu uso são bem simples e intuitivos.

#### Passo 1:

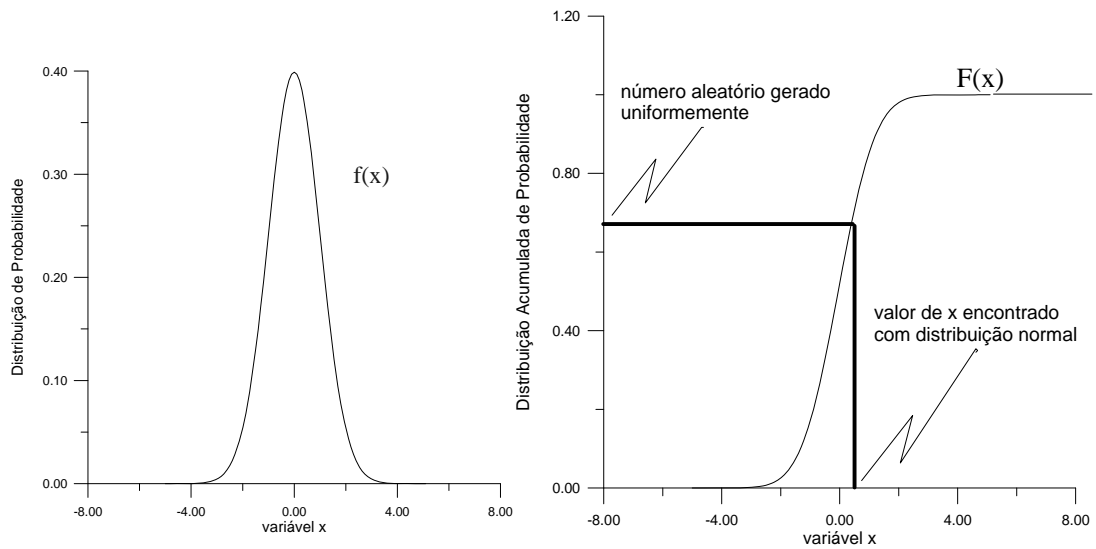
Escolhe-se uma distribuição de probabilidade que, comprovadamente pela estatística, descreve as perturbações aleatórias.

Exemplo: Distribuição Normal ou Gaussiana.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$

Passo 2:

Gera-se a função distribuição acumulada  $F(x)$ , ou seja,  $F(x) = \sum f(x)$



Passo 3:

Gera-se um número aleatório uniforme  $F(x)$ .

Passo 4:

Procura-se na tabela de classes da acumulada onde ele pertence.

Exemplo: A seguir é apresentada uma tabela da distribuição normal  $f(x)$  com sua distribuição acumulada  $F(x)$  para  $x$  no intervalo  $[-5,5]$ .

<b>x</b>	<b>f(x)</b>	<b>F(x)</b>
5.00	0.0000015	0.0000015
-4.00	0.0001338	0.0000399
-3.00	0.0044318	0.0015837
-2.00	0.0539910	0.0255408

```

-1.00 0.2419707 0.1709566
-0.00 0.3989423 0.5199482
 1.00 0.2419707 0.8532427
 2.00 0.0539910 0.9798606
 3.00 0.0044318 0.9988617
 4.00 0.0001338 0.9999757
 5.0  0.0000015 1.0000000
    
```

A seguir foram gerados pelo método de Monte Carlo 10 números aleatórios com distribuição gaussiana. Conforme explicado anteriormente, o número da direita é aleatório com distribuição gaussiana e o da esquerda, varre-se a tabela da distribuição acumulada gaussiana.

<b>Núm.Uniforme</b>	<b>Núm.Gaussiano</b>
<b>F(x)</b>	<b>(x)</b>
0.210513	-0.800000
0.788730	0.800000
0.576517	0.200000
0.947446	1.600000
0.954481	1.700000
0.963769	1.800000
0.191558	-0.900000
0.041205	-1.700000
0.112742	-1.200000
0.185807	-0.900000
0.372420	-0.300000

### O Cálculo de Áreas

Uma aplicação muito interessante e bastante utilizada com o método de Monte Carlo é o cálculo de integrais de difícil resolução analítica, sendo uma delas, o cálculo de áreas. Para encontrar áreas utilizando o método de Monte Carlo devemos seguir os seguintes passos:

#### Passo 1:

Gera-se um par de variáveis aleatórias independentes e uniformes:

$x = \text{random};$

$y = \text{random};$

Passo 2:

Testa  $x$  na função desejada a ser integrada  $f(x)$ .

Passo 3:

Se  $y$  gerado aleatoriamente for  $y \leq f(x)$ , então o número de pontos é somado e fazemos  $N = N + 1$ , caso contrário gera-se outro para até a desigualdade ser satisfeita.

Passo 4:

No final, a área será correspondente à probabilidade dos pontos gerados cair embaixo da função  $f(x)$ , ou,

$$p = \frac{N}{n}$$

$N$ : total de pontos que satisfaz a função  $f(x)$ .

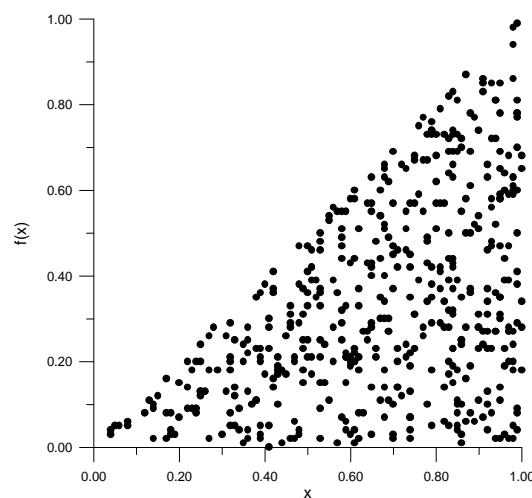
$n$ : total de pontos gerados.

Passo 5:

Multiplica-se "p" pelo retângulo da função  $C(B-A)$  e a área então será:

$$\text{Area} = C(B - A) \frac{n}{N}$$

Exemplo: Calcular a integral de  $f(x)=x$  para o intervalo  $[0,1]$  pelo método de Monte Carlo. O resultado dos pontos gerados é apresentado no gráfico abaixo. O resultado analítico é facilmente encontrado como Área = 0.5. Neste exemplo o resultado obtido pelo método foi de Área Monte Carlo = 0.489 para  $n=1000$  pontos gerados.



O programa a seguir, elaborado em linguagem turbo pascal, exemplifica como utilizar o método de Monte Carlo no cálculo de áreas.

```

program integral(ar);
uses crt;
var
  i, soma,num:integer;
  x,y,area,LIMINF,LIMSUP,FATOR,MAXY,ff:real;
  ar: text;
{=====}
function efe (xis:real):real;
var
  aux1,aux2:real;
begin
  { aux1:=exp(xis);
  aux2:=exp(-xis);
  efe:=sin(xis)*(aux1-aux2)/2;}
  efe:=xis;
end;
{=====}
begin
assign(ar,'ar.dat');
rewrite(ar);
randomize;
clrscr;
{////////////////////////////////////}
num:=1000;
LIMINF:=0;
LIMSUP:=1;
MAXY:=1;
FATOR:=MAXY*(LIMSUP-LIMINF);
{////////////////////////////////////}
soma:=0;
for i:=1 to num do

```

```

begin
x:=LIMSUP*random;
y:=MAXY*random;
ff:=efe(x);
if y < efe(x) then
begin
soma:=soma+1;
writeln(ar,x:4:2,' ',y:4:2,' ',ff:4:2);
end;
writeln(i:5,' ', soma/i:10:5);
end;
area:=FATOR*soma/num;
writeln('AREA = ',area:10:5);
end.

```

## VIII.9 - Aplicações do Método de Monte Carlo

### O Modelo do Crescimento Logístico

O modelo logístico é aplicado com frequência na ecologia e biologia para representar o crescimento de populações (animais, células tumorais, pragas, etc.) O modelo é muito simples e uma das representações se baseiam na equação diferencial:

$$\dot{x} = x(\rho_n(x) - \rho_m(x))$$

onde

$\rho_n(x)$  : taxa de natalidade

$\rho_m(x)$  : taxa de mortalidade

Se for assumido que a taxa de natalidade é uma função linear decrescente,

$$\rho_n(x) = a_1 - b_1x$$

e a taxa de mortalidade é uma função linear crescente de x:

$$\rho_m(x) = a_2 + b_2x$$

com  $a_1, a_2 > 0$  e  $b_1, b_2 > 0$ . O crescimento da população será:

$$\dot{x} = x((a_1 - a_2) - (b_1 + b_2)x) = x(r - sx)$$

com os valores de  $r$  e  $s$  sendo:

$$r = a_1 - a_2$$

$$s = b_1 + b_2$$

Se o tempo for descontado do processo, pode-se observar que existem duas possibilidades para a população:

$x \uparrow$  : pode nascer um indivíduo { evento N }

$x \downarrow$  : pode morrer um indivíduo { evento M }

Se ocorrer o evento N, então  $x_{i+1} = x_i + 1$

Se ocorrer o evento M, então  $x_{i+1} = x_i - 1$

As probabilidades serão proporcionais às taxas de nascimento e morte

$$P(N) \propto x\rho_n(x) = a_1x - b_1x^2$$

$$P(M) \propto x\rho_m(x) = a_2x + b_2x^2$$

Desde que estes eventos são mutuamente exclusivos,

$$P(N) = p = \frac{a_1 - b_1x^2}{(a_1 + a_2)x - (b_1 - b_2)x^2}$$

$$P(M) = 1 - p = \frac{a_2x + b_2x^2}{(a_1 + a_2)x - (b_1 - b_2)x^2}$$

Podemos a partir dessas equações simular o crescimento de uma população, onde por exemplo poderemos adotar os seguintes valores dos parâmetros:

$$x(0) = 69$$

$$a_1 = 0.7 \quad b_1 = 0.0045 \quad a_2 = 0.2 \quad b_2 = 0.0005$$

Com estes parâmetros teremos a correspondente equação diferencial:

$$\dot{x} = 0.5x - 0.005x^2$$

com  $r = 0.5$  e  $s = 0.005$ . Vamos seguir os seguintes passos de simulação:

Passo 1:

Para o início,

$$x = 69$$

$$p = \frac{(0.7)(69) - (0.0045)(69^2)}{(0.7 + 0.2)(69) - (0.0045 - 0.0005)(69^2)} = 0.624$$

$$1 - p = 1 - 0.624 = 0.376$$

Passo 2:

Obtém-se um número aleatório  $u$ , com distribuição uniforme  $[0,1]$ .

Passo 3:

Se  $u \leq p \Rightarrow$  o próximo evento é nascimento (N)  $\Rightarrow x = x + 1$ ;



Se  $u > p \Rightarrow$  o próximo evento é morte (M)  $\Rightarrow x = x - 1$ ;

Então teremos o seguinte resultado da simulação

passo	Tam. Pop.	P(N)	P(M)	u	Evento
1	69	0.624	0.376	0.730	M
2	68	0.627	0.373	0.170	N
3	69	0.624	0.376	0.824	M
...	...	...	...	...	...

### O Modelo do Abalo Sísmico

Num período de 600 anos, mais ou menos 330 terremotos ocorreram na região central da Itália possuindo intensidade no epicentro ( $x$ ) acima de 6 na escala. Em adição,  $x$  pode ser modelado como distribuição exponencial,

$$x = b + \alpha \ln(-\ln(F))$$

onde os parâmetros são

$b$ : localização

$\alpha$ : escala (dispersão)

$F$ : número com distribuição uniforme em  $[0,1]$ .

Um abalo sísmico em uma região específica (incluindo o epicentro) é representado por intensidade ( $y$ ), segundo a lei de atenuação:

$$y = x - \frac{1}{\ln \psi} \ln \left[ 1 + \frac{\psi - 1}{\psi_0} \left( \frac{z \phi^{x_0 - x}}{z_0} - 1 \right) \right]$$

onde  $z$  denota a distância do epicentro. Como exemplo, vamos fazer uma simulação para uma determinada região da Itália com os valores de parâmetros abaixo

$z_0$  : distância da linha isosísmica = 9.5 Km

$x_0$  : intensidade epicêntrica = 10

$\psi_0 = 1$

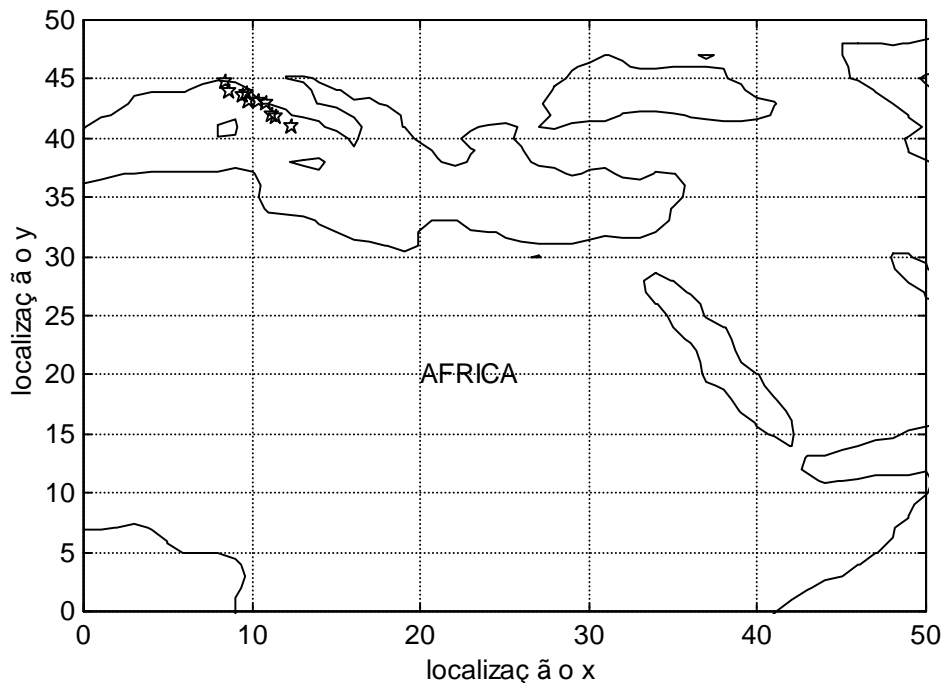
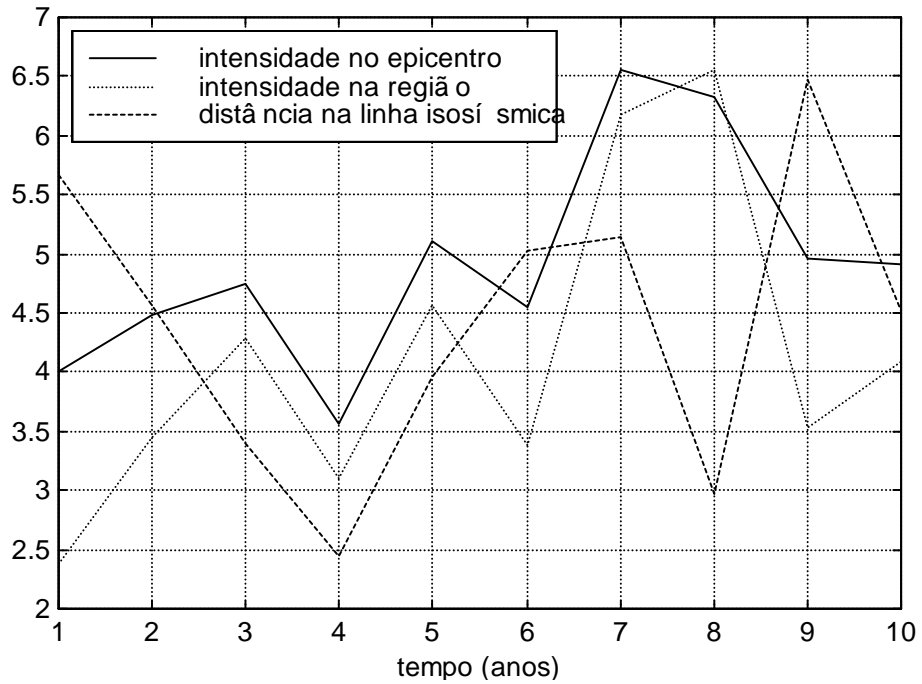
$\psi = 1.5$

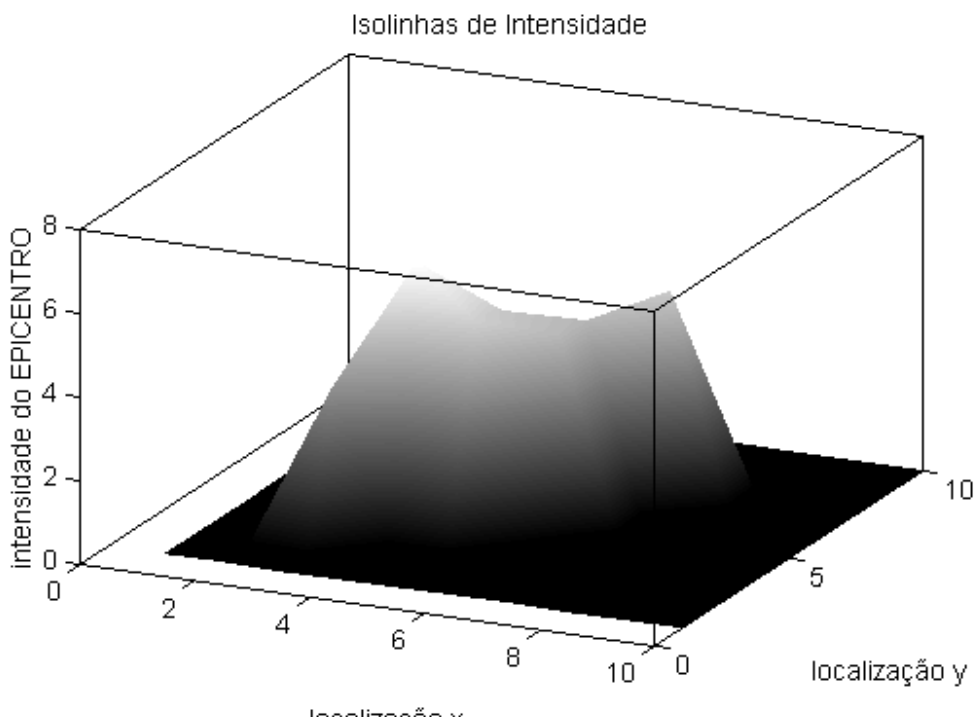
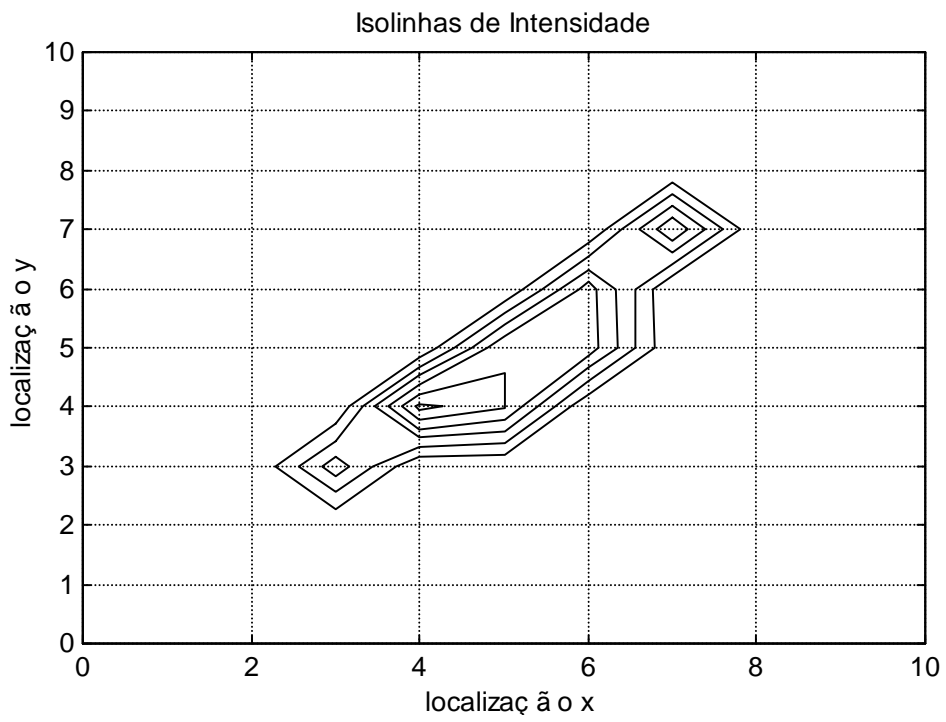
$\phi = 1.3$

$\alpha = 0.91$

$b = 6$

Vamos também supor que  $z \sim U[3 \text{ Km}, 25 \text{ Km}]$  e encontrar a distribuição de probabilidade de  $y$  por simulação de Monte Carlo. Vamos calcular  $y$  para 10 anos, supondo que cada iteração é um ano e ao mesmo tempo, gerar pontos de coordenadas com distribuição para as variáveis  $x \sim N(0,1)$  e  $y \sim N(0,1)$ . Com isso estaremos simulando a localização de cada terremoto.





A simulação anterior pode ser repetida e variada utilizando o software Matlab 5.0 através do programa a seguir:

```

hold off
%=====constantes=====
z0=9.5;
x0=10;
psi0=1;
psi=1.5;
fi=1.3;
%-----
%intervalo para dist. unif. da distancia do epicentro z
a=2;
b=8;
%-----
%parametros para a distribuicao de Gumbel para a intensidade
%do terremoto x
escala=0.91;
loc=6;
%NUMERO DE ANOS PARA SIMULACAO
anos=10;
%=====
rand('seed',sum(100*clock))
for i=1:1:anos
    F=rand;
    z(i)=a+(b-a)*rand;
    x(i)=loc+escala*log(-log(F));
    y(i)=x(i)-(1/log(psi))*log(1+((psi-1)/psi0)*((z(i)*(fi)^(x0-
x(i)))/z0-1));
end;
plot(x,'-k');
hold on
plot(y,':k');
plot(z,'--k');
grid;
xlabel('tempo (anos)')
legend('intensidade no epicentro','intensidade na região','distância na
linha isosísmica')
pause;
for i=1:1:10
    for j=1:1:10
        intens(i,j)=0;
        lugx(i,j)=0;
        luy(i,j)=0;
    end;
end;
j=1;
for i=1:1:anos

    lugx(i,j)=z(i)+rand;
    luy(i,j)=z(i)+rand;

```

```

        intens(round(lugx(i,j)),round(lugy(i,j)))=x(i);

end;
hold off
load topo
contour(0:359,-89:90,topo,[0 0],'k')
set(gca,'xlim',[0 50],'ylim',[0 50])
hold on
for i=1:1:1
    plot((15-lugx(:,i)),(38+lugy(:,i)),'pk')
    hold on
end;
grid;
xlabel('localização x');
ylabel('localização y');
text(20,20,'AFRICA');
pause;
hold off
contour(intens,'k')
set(gca,'xlim',[0 10],'ylim',[0 10])
grid;
xlabel('localização x');
ylabel('localização y');
title('Isolinhas de Intensidade');
pause;
hold on
colormap(gray)
surf(intens)
shading interp
view(25,30)
hidden off
grid;
xlabel('localização x')
ylabel('localização y')
zlabel('intensidade do EPICENTRO')

```

## EXERCÍCIOS

1- Observe o seguinte modelo dinâmico para uma fila infinita com  $n = 0,1,2$ :

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -(\lambda + \mu)P_1 + \lambda P_0 + \mu P_2$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\mu P_2 + \lambda P_1$$

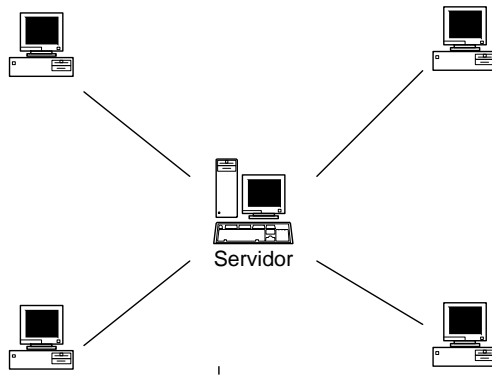
- Encontrar  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  para o modelo acima no caso estacionário.
- Se a probabilidade de não ter nenhum trabalho em fila for  $P_0=0.57$  e a razão de chegada é  $\lambda=0.8$  trab./min., qual o tempo médio de espera para um trabalho ser atendido?
- Qual a probabilidade de mais de 2 trabalhos estarem na fila de espera?

2- Uma universidade possui um computador de grande porte como servidor para atender as áreas de geografia, matemática, física e computação. As taxas de chegada  $\lambda$  e de atendimento  $\mu$  são:

	Chegada - $\lambda$	Atendimento - $\mu$
Geografia	1/50	1/5
Matemática	1/30	1/10
Física	1/20	1/12
Computação	1/15	1/14

Calcular o tamanho esperado das filas para cada tipo de clientes. Neste caso, se fosse o analista, qual área deveria utilizar o computador fora do expediente para evitar filas?

3- A figura mostra uma rede de computadores com um servidor e 4 micros ligados a ele. A taxa de atendimento desta rede é de 1 micro/segundo, sendo que em um segundo 3 micros ficam em fila. Com base neste fato:



- Montar as equações da dinâmica das probabilidades.
- Simular o sistema para um tempo final de 20 segundos.
- Fazer os gráficos das variações das probabilidades no tempo.
- Justificar através dos gráficos a partir de que instante todas as probabilidades tornam-se estacionárias.
- A rede teria um desempenho melhor se ao invés de 4 micros tivesse apenas 3? Responda isto com uma nova simulação e gráficos agora com apenas 3 micros.