

Sumário

1	Introdução	4
2	Equações Diferenciais	5
2.1	Classificação	5
2.2	Solucionando Equações Diferenciais Ordinárias	6
3	Métodos Numéricos	7
3.1	Método de Euler	7
3.2	Método Runge-Kutta de Quarta Ordem	16
4	Pontos de Equilíbrio e Estabilidade	21
5	Modelo Dinâmico de Emissão de CO₂	26
6	Controle Ótimo	33
6.1	Controle Ótimo Aplicado ao Modelo Dinâmico de Emissão de CO ₂	40
7	Conclusão	53

Lista de Figuras

1	<i>UserForm</i> para resolução da eq. 19.	8
2	Solução analítica (pontilhada) e aproximada (linha contínua) para a eq 19.	9
3	Gráfico do erro da aproximação pelo Método de Euler para a eq. 19	10
4	<i>UserForm</i> para exemplo de Juros Compostos.	10
5	Solução analítica (pontilhada) e aproximada (linha contínua) para o exemplo de Juros Compostos.	11
6	Gráfico do erro da aproximação para o exemplo de Juros Compostos.	12
7	<i>UserForm</i> para exemplo de exponencial genérica.	12
8	<i>UserForm</i> para exemplo da eq. 20.	14
9	Solução analítica (pontilhada) e aproximada (linha contínua) para o exemplo da Equação Logística resolvida pelo método de Euler.	15
10	Erro associado à aproximação pelo Método de Euler.	16
11	<i>UserForm</i> para exemplo Predador Presa pelo método de Runge-Kutta.	17
12	Solução analítica e aproximação para exemplo Predador Presa pelo método de Runge-Kutta.	18
13	Erro relacionado à aproximação pelo método de Runge-Kutta para o exemplo Predador Presa.	18
14	Solução para e pelo método de Runge-Kutta.	20
15	Plano de fases com o valor inicial (1,1).	20
16	Solução para um modelo presa-predador pelo método de Runge-Kutta.	23
17	Retrato de fases para o sistema predador-presa apresentado.	23
18	Retrato de fases para o sistema 37.	24
19	Retrato de fases para o sistema 39.	25
20	Relações entre variáveis e parâmetros do modelo.	26
21	Simulação do modelo para a Itália.	29
22	Simulação do modelo para a Itália via MatLab.	31
23	Simulação do modelo para a Alemanha via MatLab.	32
24	Simulação do modelo para a Alemanha via MatLab.	32
25	Resolução do problema 69.	37
26	Condição de transversalidade em problema de controle ótimo.	39
27	Trajetória ótima de emissões para a Itália.	42
28	Trajetória ótima de floresta para a Itália.	42
29	Trajetória ótima de PIB para a Itália.	43

30	<i>Trajectoria ótica do controle referente a reflorestamento para a Itália.</i>	43
31	<i>Trajectoria ótica do controle referente a desenvolvimento de tecnologia limpa para a Itália.</i>	44
32	<i>Trajectoria ótica de emissões para a França.</i>	44
33	<i>Trajectoria ótica de floresta para a França.</i>	45
34	<i>Trajectoria ótica de PIB para a França.</i>	45
35	<i>Trajectoria ótica do controle referente a reflorestamento para a França.</i>	46
36	<i>Trajectoria ótica do controle referente a desenvolvimento de tecnologia limpa para a França.</i>	46
37	<i>Trajectoria ótica de emissões para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.</i>	48
38	<i>Trajectoria ótica de floresta para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.</i>	48
39	<i>Trajectoria ótica de PIB para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.</i>	49
40	<i>Trajectoria ótica do controle referente a reflorestamento para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.</i>	49
41	<i>Trajectoria ótica do controle referente a desenvolvimento de tecnologia limpa para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.</i>	50
42	<i>Trajectoria ótica de emissões para a Alemanha, projeção de 15 anos a partir de 1950.</i>	50
43	<i>Trajectoria ótica de floresta para a Alemanha, projeção de 15 anos a partir de 1950.</i>	51
44	<i>Trajectoria ótica de PIB para a Alemanha, projeção para 15 anos a partir de 1950.</i>	51
45	<i>Trajectoria ótica do controle referente a reflorestamento para a Alemanha, projeção para 15 anos a partir de 1950.</i>	52
46	<i>Trajectoria ótica do controle referente a desenvolvimento de tecnologia limpa para a Alemanha, projeção para 15 anos a partir de 1950.</i>	52

1 Introdução

Nestes últimos dois séculos, o planeta observou um massivo crescimento econômico. Se considerarmos o resultado líquido, praticamente todos os países do mundo cresceram, a qualidade de vida de suas populações melhorou, a indústria global se desenvolveu e questões ambientais passaram, então, a preocupar.

Estas melhorias, porém, foram alcançadas a um custo social que está se mostrando alto, com mudanças climáticas suspeitas de terem sido causadas pelo fenômeno do aquecimento global, provavelmente consequência de emissões de poluentes na atmosfera provenientes de atividades humanas.

Tais questões têm inspirado trabalhos na área de desenvolvimento de tecnologias e ferramentas de proteção ambiental, para assegurar a minimização do impacto deste crescimento econômico. Algumas ferramentas importantes nesta área são o uso de equações diferenciais e o uso de teoria de otimização de modelos dinâmicos, a serem discutidos adiante.

Uma grande variedade de fenômenos físicos, biológicos e sociais pode ser observada e modelada através de equações diferenciais. Através destas equações, é possível fazer previsões sobre o comportamento futuro de um processo natural a partir de parâmetros que podem ser observados empiricamente. Uma breve introdução a estas equações encontra-se na seção 2 deste trabalho.

Porém, a vasta maioria dos problemas de equações diferenciais de primeira ordem com valor inicial não possui soluções que possam ser encontradas por meios analíticos.

É necessário, então, abordar tais problemas de maneira diferente, fazendo mão, por exemplo, de métodos de integração numérica para aproximação de soluções. Ainda, soluções destas equações representam pontos de equilíbrio do sistema, e faz-se importante para o pesquisador estudar as propriedades deste equilíbrio. Aqui, então, foram discutidos alguns métodos de integração e o estudo de pontos de equilíbrio nas seções 3 e 4.

A discussão em torno deste instrumental será útil na seção 5, quando da simulação de um modelo dinâmico para emissão de dióxido de carbono, com a tentativa de aproximar esta simulação a dados reais. Após isto, será estudada a teoria sobre Controle Ótimo na seção 6, com a aplicação seguinte desta teoria e resolução de problemas de otimização deste modelo à suas variáveis de controle, que representam parâmetros econômicos de alocação de recursos, na subseção 6.1.

2 Equações Diferenciais

Equações diferenciais expressam sistemas dinâmicos, podendo ser usadas para modelar fenômenos naturais e sociais. São equações compostas de derivadas de funções desconhecidas e o uso de modelos que as incorporam permitiram um grande avanço tecnológico e científico para a humanidade (SANDOVAL, 2006c).

São utilizadas para a compreensão de doenças, de processos biológicos, de crescimento populacional e interação entre duas ou mais populações, para explicar a dinâmica de preços de um mercado, para levar o homem à lua e, ainda mais difícil, trazê-lo de volta. Estes são apenas alguns exemplos dentro de uma grande variedade de possibilidades.

2.1 Classificação

Existem diferentes tipos de classificações para equações do tipo diferenciais, cada uma abordando suas diferentes características. Em primeiro lugar, elas podem ser ordinárias ou parciais. Equações diferenciais do tipo ordinárias (ou EDO's) são aquelas que incorporam apenas derivadas simples, enquanto equações diferenciais do tipo parciais incorporam derivadas parciais.

Exemplos:

$$3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2y(t) = 4t \quad (1)$$

$$2\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Onde (1) é um exemplo de equação diferencial ordinária e (2) um exemplo de equação diferencial parcial. Destes dois exemplos é possível retirar mais duas classificações: ordem e homogeneidade. A derivada de maior grau, dentro da equação diferencial, define sua ordem; assim, o primeiro exemplo é uma equação diferencial ordinária de segundo grau, enquanto o segundo exemplo é uma equação diferencial parcial de primeiro grau.

Por sua vez, a homogeneidade de uma função é determinada pela igualdade da equação ao valor zero ou nulo, indicando a não existência de um termo externo. O primeiro exemplo, portanto, é uma equação diferencial ordinária de segundo grau não homogênea, enquanto o segundo exemplo é uma equação diferencial parcial de primeiro grau homogênea.

2.2 Solucionando Equações Diferenciais Ordinárias

A solução de equações diferenciais, em geral, gira em torno de tentativas de se descobrir quais são as funções, inicialmente desconhecidas, que geraram as derivadas incorporadas às equações estudadas. Como exemplo, tomemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y \quad (3)$$

Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{dy}{y} = dt \quad (4)$$

Integrado dos dois lados:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_{t_0}^t dt \quad (5)$$

Supondo a condição inicial $y(t_0) = 0$, onde $t_0 = 0$, e reescrevendo as integrais anteriores com estas condições, temos:

$$\int_0^y \frac{dy}{y} = \int_0^t dt \quad (6)$$

o que nos fornece a seguinte solução, onde c é uma constante real:

$$\ln y = t + c \quad (7)$$

$$y(t) = e^{t+c} \quad (8)$$

Porém, nem sempre é possível chegar a uma solução analítica. Assim, é necessário fazer mão de métodos de integração numérica, que serão discutidos a seguir.

3 Métodos Numéricos

3.1 Método de Euler

Aproximar numericamente uma equação diferencial é obter valores da função em questão para diferentes valores da variável independente “x”. O Método de Euler consiste em um método de integração numérica onde, conhecendo uma condição inicial e utilizando um “ Δx ” suficientemente pequeno, é possível obter uma aproximação para a função a partir da derivada em “x”, variável esta que geralmente representa o tempo (BOYCE et al.; 1999).

Como exemplo, a equação diferencial genérica de primeira ordem com valor inicial a seguir:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), y(t_0) = y_0 \quad (9)$$

Uma maneira de calcular aproximações para as diferentes soluções desta equação, variando t , é utilizar o método da reta tangente, também conhecido como método de Euler. É possível a construção de uma reta tangente a um ponto do gráfico de soluções da equação diferencial com a seguinte equação:

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) \quad (10)$$

Esta reta tangente pode ser considerada uma boa aproximação para a curva solução em questão em um intervalo de tempo relativamente curto para que a reta tangente não se distancie demasiadamente da solução real. Assim, para valores de t_1 suficientemente próximos a t_0 , é possível estimar y_1 , como a seguir:

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) \quad (11)$$

Analogamente, é possível continuar nossa aproximação para o cálculo de y_2 . O valor real de y_1 não é conhecido, mas é possível usar sua aproximação, já calculada:

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1) \quad (12)$$

Assim, generalizando para y_{n+1} , tem-se:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n) \quad (13)$$

Como exemplo prático, é possível ter uma função que representa o crescimento populacional de uma colônia fictícia de bactérias que cresce exponencialmente com o tempo pela função $\frac{dP}{dt} = P$. Utilizando o que foi aprendido na seção 2.2, é possível utilizar técnicas de cálculo para resolver esta equação, a

seguir:

$$\frac{dP}{dt} = P \quad (14)$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dP}{P} = dt \quad (15)$$

Integrando dos dois lados, com condição inicial $P(t_0) = 0$, onde $t_0 = 0$:

$$\int_0^P \frac{dP}{P} = \int_0^t dt \quad (16)$$

temos que:

$$P(t) = ce^t \quad (17)$$

Porém, é possível utilizar um código em VBA, no *Excel*, para calcular cada passo da integração pelo Método de Euler, facilitando, assim, as contas.

Por este método, tem-se que:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \Delta t \frac{dP}{dt} \quad (18)$$

Assim, para:

$$\frac{dP}{dt} = e^t \quad (19)$$

é possível construir o seguinte UserForm e código VBA, no editor de *Visual Basic* do *Excel*:

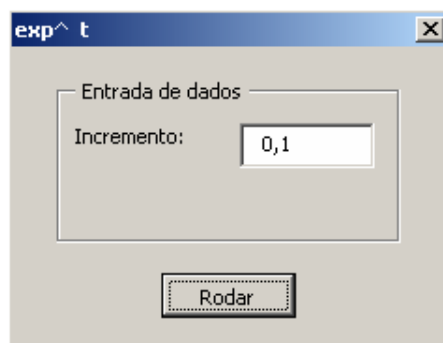


Figura 1: *UserForm* para resolução da eq. 19.


```

Function f(y As Double) As Double
    f = y
End Function

For i = 2 To 20
    y(i) = y(i - 1) + h * f(y(i - 1))
    t = CSng(t) + CSng(h)
    Worksheets("Plan1").Cells(i, 1) = t
    Worksheets("Plan1").Cells(i, 2) = y(i)
    Worksheets("Plan1").Cells(i, 3) = Exp(t)
Next i

```

Onde t representa o passo da integração, enquanto a função f refere-se à *function* que retorna a derivada da função y . O código completo deste programa encontra-se no Anexo 1.

Uma *function*, ou função, é uma rotina encapsulada que recebe parâmetros para processamento, retornando um resultado. No exemplo, a *function* f tem como parâmetro o valor da função y , retornando a derivada da função, que, no caso, continua sendo y .

Com o resultado para os primeiros 20 passos da integração, utilizando um incremento da ordem de um décimo por passo, o seguinte gráfico foi criado, representando a solução analítica e a curva de aproximação pelo método de Euler:

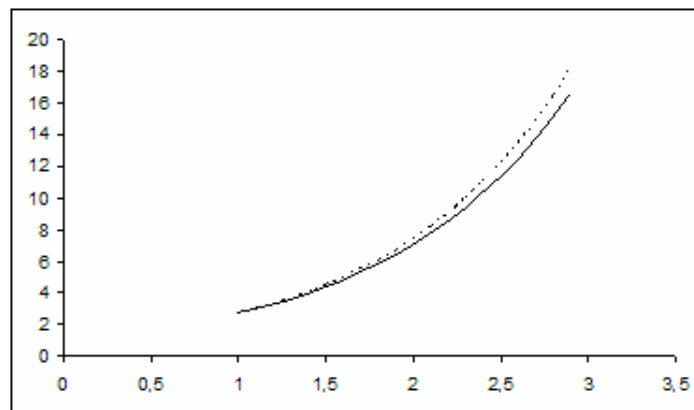


Figura 2: Solução analítica (pontilhada) e aproximada (linha contínua) para a eq 19.

Para uma melhor visualização do erro da estimação, pode-se subtrair da solução analítica a encontrada pelo método de Euler, construindo um gráfico dos erros, como representado a seguir:

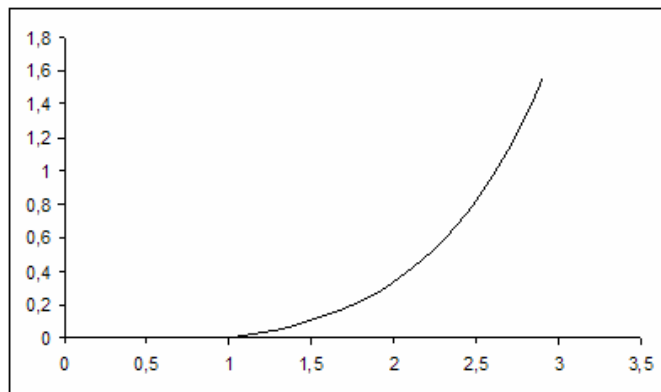


Figura 3: Gráfico do erro da aproximação pelo Método de Euler para a eq. 19

Nota-se que a aproximação pelo método de Euler se distancia da solução analítica com o aumento em t .

Este mesmo raciocínio pode ser aplicado ao cálculo de juros compostos capitalizados de forma contínua. Tendo um capital inicial, aplicado a uma taxa de juros k , o investidor terá, daqui t unidades de tempo, . Analogamente, tal integração resolvida pelo Excel fica caracterizada como a seguir:

Figura 4: UserForm para exemplo de Juros Compostos.

Function f(k As Single, y As Double) As Double

$$f = k * y$$

End Function

```

For i = 2 To 20
  y(i) = y(i - 1) + h * f(k, y(i - 1))
  t = CSng(t) + CSng(h)
  Worksheets("plan2").Cells(i, 1) = t
  Worksheets("plan2").Cells(i, 2) = y(i)
  Worksheets("plan2").Cells(i, 3) = S0 * Exp(k * t)
Next i

```

Para os primeiros 20 passos de integração com um incremento em t da ordem de um décimo por passo, com capital inicial igual a 1000 u.m. e 8% de juros a.p. (o programa completo encontra-se no Anexo 2), o seguinte gráfico é construído ilustrando, novamente, a solução analítica e a aproximação pelo método de Euler:

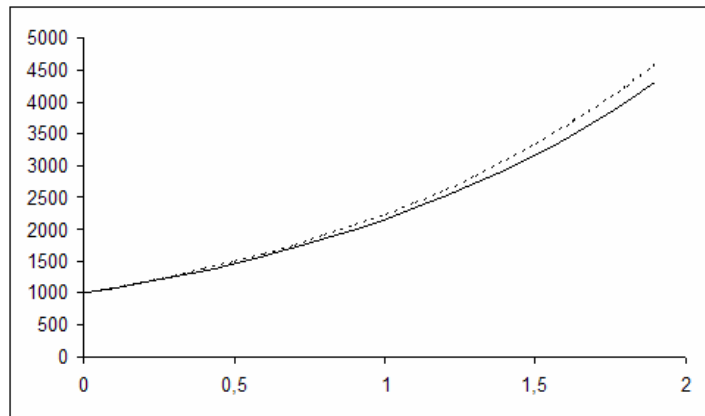


Figura 5: Solução analítica (pontilhada) e aproximada (linha contínua) para o exemplo de Juros Compostos.

A diferença entre a solução analítica e a aproximação pelo método de Euler consta no seguinte gráfico, onde fica evidenciado o aumento do erro acumulado com o aumento de t :

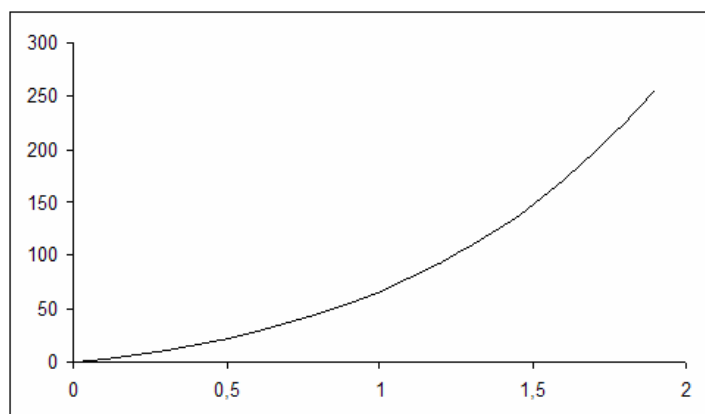


Figura 6: Gráfico do erro da aproximação para o exemplo de Juros Compostos.

De maneira geral, é possível criar um programa para o cálculo da integração numérica, pelo método de Euler, para uma função exponencial genérica ae^{kt} :

Figura 7: UserForm para exemplo de exponencial genérica.

Function f(b As Single, y As Double) As Double

*f = b * y*

End Function

For i = 2 To (n / h) + 1

*y(i) = y(i - 1) + h * f(b, y(i - 1))*

t = CSng(t) + CSng(h)

Worksheets("plan3").Cells(i, 1) = t

Worksheets("plan3").Cells(i, 2) = y(i)

If CSng(S0) = 0 Then

*Worksheets("plan3").Cells(i, 3) = Exp(b * t)*

Else

```

        Worksheets("plan3").Cells(i, 3) = a * Exp(b * t)
    End If
Next i

Private Sub CB2_Click()
    Charts.Add
    ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
    ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Plan3").Range("A1:C"
& n + 1), PlotBy :=xlColumns
    ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan3"

    ActiveChart.Legend.Select
    Selection.Delete
End Sub

```

Aqui, são verificados alguns aperfeiçoamentos no código. Em especial, foi adicionado um botão para a automatização da criação do gráfico e um TextBox para a entrada do tempo final. O código completo para este programa está no Anexo 3.

Porém, uma população real geralmente não cresce de maneira exponencial, pois encontra, no meio, fatores limitantes para seu crescimento. Tais fatores podem ser, por exemplo, escassez de alimentos, presença de predadores ou limitações físicas de espaço.

Para modelar tal cenário, é possível utilizar a seguinte equação diferencial, conhecida como equação logística:

$$\frac{dP'}{dt} = kP(t) - lP(t)^2 \quad (20)$$

Com a ajuda do Excel, é possível criar, também, um programa em VBA para realizar esta integração pela forma numérica, utilizando novamente o método de Euler:

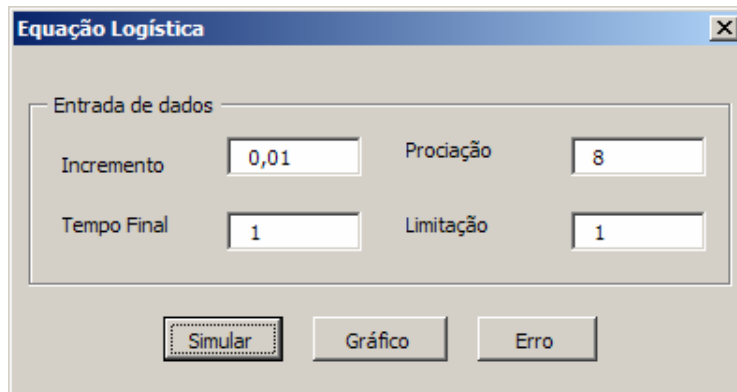


Figura 8: UserForm para exemplo da eq. 20.

Function f(proc As Single, lim As Single, t As Single, y As Double) As Double

$$f = proc * y - lim * y ^ 2$$

End Function

For i = 2 To (n / h) + 1

$$t = CSng(t) + CSng(h)$$

$$y(i) = y(i - 1) + h * f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), Cdbl(y(i - 1)))$$

$$Worksheets("plan4").Cells(i + 1, 1) = t$$

$$Worksheets("plan4").Cells(i + 1, 2) = y(i)$$

$$Worksheets("plan4").Cells(i + 1, 3) = (k / l) / (1 - (1 - (k / l)) * Exp(-k * t))$$

$$Worksheets("plan4").Cells(i + 1, 4) = Cells(i + 1, 3) - Cells(i + 1, 2)$$

Next i

Private Sub CB2_Click()

Charts.Add

ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers

ActiveChart.SetSourceData Source:=Worksheets("Plan4").Range("A1:C102"),

PlotBy :=xlColumns

ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan4"

ActiveChart.Legend.Select

Selection.Delete

```

End Sub

Private Sub CB3_Click()
    Charts.Add
    ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
    ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Plan4").Range("A2:A102,D2:D102"),
    PlotBy:=xlColumns
    ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan4"

    ActiveChart.Legend.Select
    Selection.Delete
End Sub

```

O usuário entra com valores referentes às taxas de procriação e limitação da população estudada, além de especificar o incremento do tempo (passo da integração) e o tempo final (programa completo e tabela com resultados no Anexo 4). Uma simulação para os valores observados na janela apresentada gera os seguintes gráficos de soluções e erro:

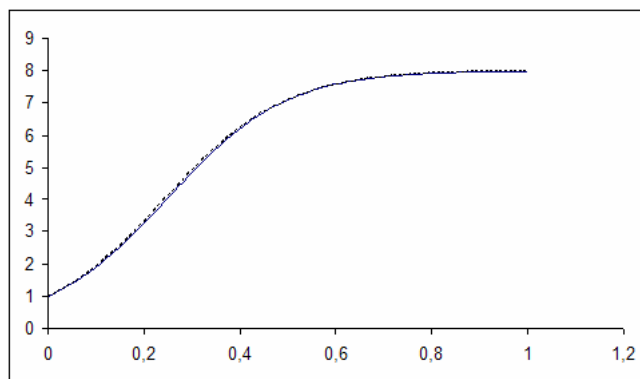


Figura 9: Solução analítica (pontilhada) e aproximada (linha contínua) para o exemplo da Equação Logística resolvida pelo método de Euler.

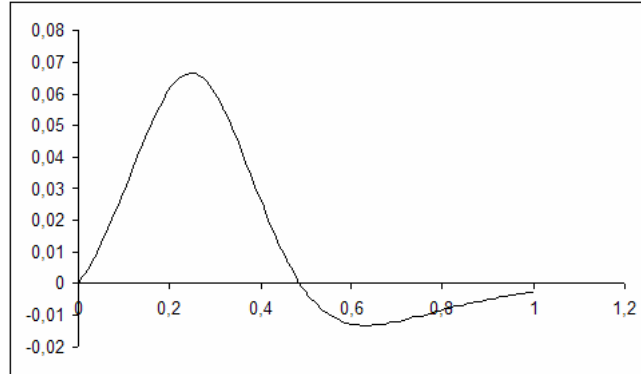


Figura 10: *Erro associado à aproximação pelo Método de Euler.*

Conforme o gráfico da figura 9, percebe-se o crescimento da população em um ambiente com fatores limitantes agindo. Em especial, é possível perceber que, para uma população inicial de um indivíduo com um fator de crescimento na ordem de 8 u.m. e com um fator de limitação na ordem de u.m., a estabilização da população se dá em 8 indivíduos no sistema. Ainda, percebe-se que o método de Euler para esta equação diferencial, com os parâmetros utilizados, produziu erros a partir da segunda casa decimal, sendo que a curva da solução real se aproxima bem da curva de aproximação.

3.2 Método Runge-Kutta de Quarta Ordem

O método de Euler pertence ao que é conhecido como classe de métodos de Runge-Kutta, referência aos matemáticos alemães Carl David Runge e M. Wilhelm Kutta. Existe, porém, o método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem, usualmente chamado simplesmente de método de Runge-Kutta, tendo maior precisão que o método de Euler. Sua fórmula consiste em utilizar, como coeficiente angular, uma média ponderada de valores de $f(t, y)$ dentro do intervalo $\Delta t = t_n - t_{n-1}$. Assim, tem-se (BOYCE et al.; 1999):

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right) \quad (21)$$

onde

$$\begin{cases} k_{n1} = f(t_n, y_n) \\ k_{n2} = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}) \\ k_{n3} = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}) \\ k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3}) \end{cases} \quad (22)$$

Aplicando este método ao último exemplo, foi possível reduzir consideravelmente os erros da aproximação. Para isto, foi criada mais uma macro, a seguir (o programa completo encontra-se no Anexo 5):

Figura 11: UserForm para exemplo Predador Presa pelo método de Runge-Kutta.

Function f(proc As Single, lim As Single, t As Single, y As Double) As Double

*f = proc * y - lim * y ^ 2*

End Function

For i = 2 To (n / h) + 1

t = CSng(t) + CSng(h)

k1 = f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), CDBl(y(i - 1)))

*k2 = f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), y(i - 1) + (h / 2) * k1)*

*k3 = f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), y(i - 1) + (h / 2) * k2)*

*k4 = f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), y(i - 1) + h * k3)*

*y(i) = y(i - 1) + (h / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)*

Worksheets("plan5").Cells(i + 1, 1) = t

Worksheets("plan5").Cells(i + 1, 2) = y(i)

*Worksheets("plan5").Cells(i + 1, 3) = (k / l) / (1 - (1 - (k / l * y(1))) * Exp(-k * t))*

Worksheets("plan5").Cells(i + 1, 4) = Cells(i + 1, 3) - Cells(i + 1, 2)

Next i

A seguir, os respectivos gráficos da aproximação e do erro referente à solução analítica:

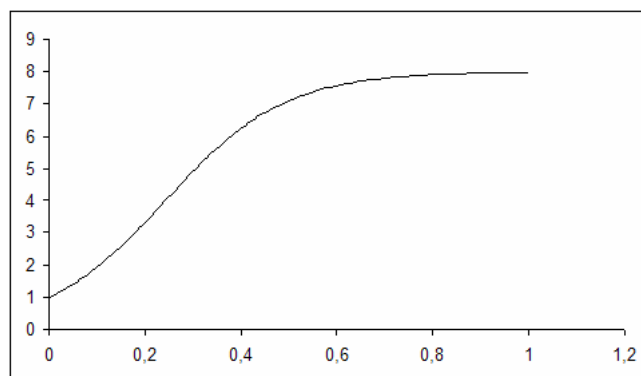


Figura 12: *Solução analítica e aproximação para exemplo Predador Presa pelo método de Runge-Kutta.*

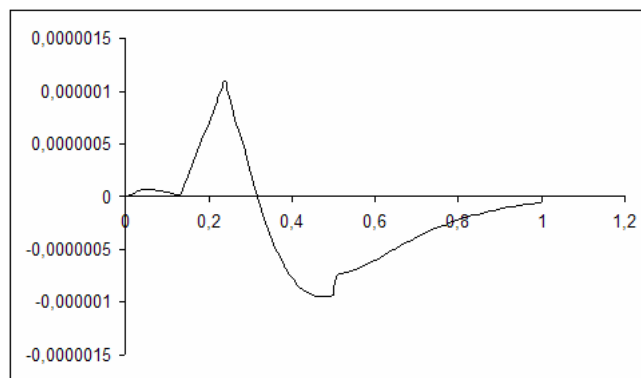


Figura 13: *Erro relacionado à aproximação pelo método de Runge-Kutta para o exemplo Predador Presa.*

Visto que os erros se concentram apenas a partir da quinta casa decimal, a curva de aproximação praticamente se sobrepõe à curva solução, resultado este muito superior ao encontrado pelo método de Euler.

Uma limitação do método de Runge-Kutta é só poder tratar de equações diferenciais de primeira ordem. Porém, sempre é possível transformar uma equação diferencial de ordem “n” em um sistema de “n” equações diferenciais de primeira ordem utilizando mudança de variáveis (SANDOVAL, 2006b). Para ilustrar tal transformação, é possível utilizar a seguinte equação como exemplo:

$$x'' + 0.125x' + 2x = 0 \tag{23}$$

Se utilizarmos as seguintes variáveis de transformação:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x_1' \end{aligned} \quad (24)$$

é possível reescrever a equação 23 com o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 0.125x_2 \end{cases} \quad (25)$$

Assim, surge a necessidade de escrever um programa que realize a integração numérica pelo método de Runge-Kutta das duas equações simultaneamente. Para isto, são necessárias duas funções $f1$ e $f2$, que retornam as derivadas de x_1 e x_2 . Cada uma destas funções é chamada por seis valores de $f(t, y)$ dentro do intervalo $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ para cada derivada, como a seguir:

```
Function f1(x1 As Single, x2 As Single, t As Single) As Single
    f1 = x2
End Function
```

```
Function f2(x1 As Single, x2 As Single, t As Single) As Single
    f2 = -2 * x1 - 0.125 * x2
End Function
```

```
For i = 0 To ((10 / h) - 1)
    t = t + h
    k11 = f1(x1(i), x2(i), CSng(t))
    k12 = f2(x1(i), x2(i), CSng(t))
    dx21 = x1(i) + (h / 2) * k11
    dx22 = x2(i) + (h / 2) * k12
    k21 = f1(CSng(dx21), CSng(dx22), CSng(t) + (h / 2))
    k22 = f2(CSng(dx21), CSng(dx22), CSng(t) + (h / 2))
    dx31 = x1(i) + (h / 2) * k21
    dx32 = x2(i) + (h / 2) * k22
    k31 = f1(CSng(dx31), CSng(dx32), CSng(t) + (h / 2))
    k32 = f2(CSng(dx31), CSng(dx32), CSng(t) + (h / 2))
    dx41 = x1(i) + h * k31
    dx42 = x2(i) + h * k32
    k41 = f1(CSng(dx41), CSng(dx42), CSng(t) + h)
    k42 = f2(CSng(dx41), CSng(dx42), CSng(t) + h)
```

```

x1(i + 1) = x1(i) + (h / 6) * (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 +
k41)
x2(i + 1) = x2(i) + (h / 6) * (k12 + 2 * k22 + 2 * k32 +
k42)
Cells(i + 1, 1) = t
Cells(i + 1, 2) = x1(i + 1)
Cells(i + 1, 3) = x2(i + 1)
Next i

```

Neste programa, cada dx_{ij} representa o a subdivisão de Δx para o ponto i na integração da derivada j . O programa completo pode ser encontrado no Anexo 7.

Abaixo, os gráficos de uma possível trajetória de x_1 (linha contínua) e x_2 (pontilhado) no tempo e um plano de fases gerado com o ponto inicial (1,1):

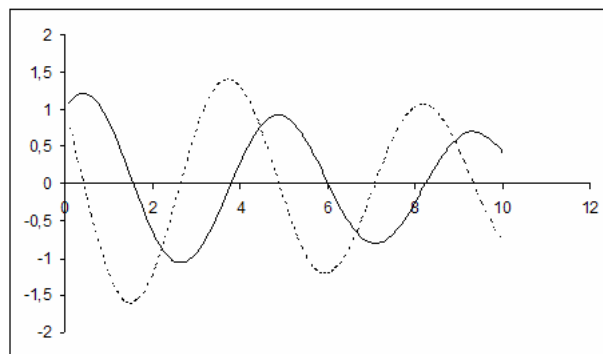


Figura 14: Solução para e pelo método de Runge-Kutta.

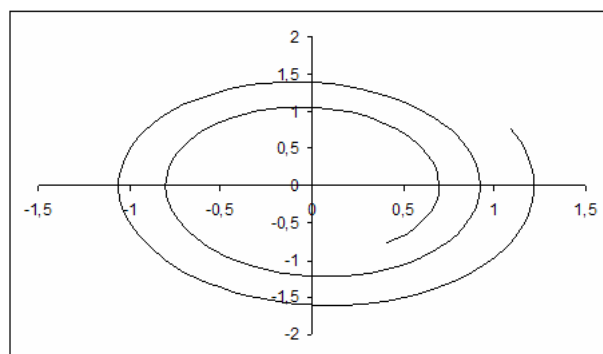


Figura 15: Plano de fases com o valor inicial (1,1).

4 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade

Um sistema de equações pode ser representado, em geral, por meio de matrizes. Como exemplo, é possível utilizar o seguinte sistema genérico:

$$\begin{aligned} ax + b &= u \\ wy + z &= v \end{aligned} \quad (26)$$

que pode ser escrito na forma matricial $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ w & z \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (27)$$

Também será útil definir, aqui, a noção de auto-valores e auto-vetores: para uma matriz A , v será um auto-vetor de A se $Av = \lambda v$, onde λ é um auto-valor (SANDOVAL, 2006a). Auto-valores λ são encontrados com a seguinte equação característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (28)$$

Enquanto auto-vetores validam a seguinte expressão, para cada auto-valor λ :

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (29)$$

A estabilidade de sistemas lineares pode ser estudada através da análise de auto-valores. Quando há pelo menos um auto-valor maior que zero, o sistema é instável no ponto estudado. Quando a parte real de todos os auto-valores for menor que zero, o sistema é assintoticamente estável, e quando a parte real de todos os auto-valores for igual a zero, o sistema é estável no ponto.

Assim, para um sistema linear, tem-se:

Tabela 1: Propriedades de estabilidade de um sistema linear.

r_1, r_2	Tipo	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	Nó	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	Nó	Assintoticamente estável
$r_1 < 0 < r_2$	Ponto de Sela	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	Nó Próprio ou Impróprio	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	Nó Próprio ou Impróprio	Assintoticamente estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$:		
$\lambda > 0$	Ponto Espiral	Instável
$\lambda < 0$	Ponto Espiral	Assintoticamente estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	Centro	Estável

Fonte: (BOYCE et al.; 1999)

Para analisar a interação entre duas espécies competidoras, Alfred J. Lotka e Vito Volterra propuseram um par de equações diferenciais não lineares de primeira ordem com a seguinte forma usual (VOLTERRA, traduzido por Chapman em 1928):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x) \end{cases} \quad (30)$$

Como exemplo, o estudo da estabilidade dos pontos críticos do seguinte sistema de equações diferenciais de Lotka-Volterra (predador-presa) a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(0.1 - 0.01y) \\ \frac{dy}{dt} = -y(0.05 - 0.01x) \end{cases} \quad (31)$$

Igualando o lado direito das equações a zero, encontram-se os pontos críticos, que são $(0,0)$ e $(50,10)$. Ao redor dos pontos críticos, é possível linearizar o sistema utilizando derivadas parciais. Para isto, a matriz Jacobiana é usada, por ser a matriz de primeiras derivadas do sistema, como a seguir:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (32)$$

Para o sistema 31, a matriz Jacobiana fica caracterizada da seguinte maneira:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 1 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Os auto-valores desta matriz têm sinais opostos, $\lambda_1 = 0.1$ e $\lambda_2 = -0.05$. Assim, no ponto $(0,0)$, o sistema é instável. Calculando no segundo ponto crítico, tem-se:

$$J(50, 10) = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.01 & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Os auto-valores desta matriz, por sua vez, são ambos complexos sem parte real, $\lambda_1 = -i\sqrt{0.05}$ e $\lambda_2 = i\sqrt{0.005}$. Assim, conforme a tabela 1, este é um ponto de centro e o sistema é estável ao redor dele.

Para ilustrar tal situação, o programa exposto no Anexo 7 simula dados para o sistema proposto e, a partir destes dados, o seguinte gráfico foi criado, mostrando a interação das populações com o passar do tempo:

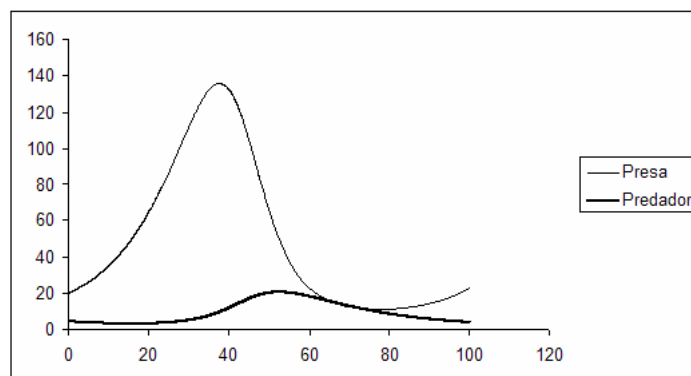


Figura 16: *Solução para um modelo presa-predador pelo método de Runge-Kutta.*

Conforme ilustrado, com condições iniciais de 20 presas e 5 predadores, a interação entre as duas espécies faz com que a população de predadores comece a crescer com o crescimento da população de presas. Assim, a população destas começa a decair, o que também resulta em um decaimento da população daqueles.

Também foi criado um retrato de fases (um gráfico em um plano xy que demonstra diferentes trajetórias de soluções para diferentes valores iniciais do sistema):

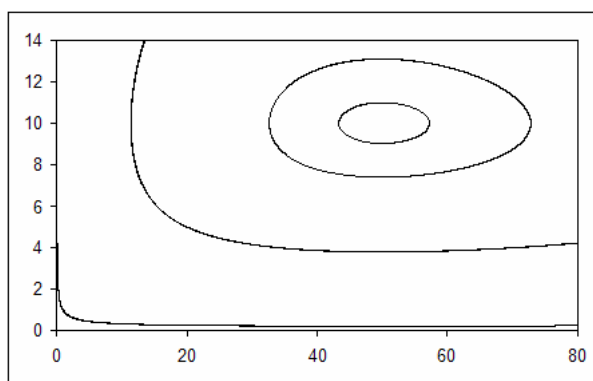


Figura 17: *Retrato de fases para o sistema predador-presa apresentado.*

Como esperado, as soluções se afastam do ponto (0,0) e giram em torno do ponto de equilíbrio estável (50,10).

Como segundo exemplo, o estudo dos pontos de equilíbrio da seguinte equação:

$$x' = x'' + x' + 2x \quad (35)$$

Como visto anteriormente, para resolver esta equação através do método Runge-Kutta, é necessário separá-la em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Tomemos as seguintes variáveis de transformação:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \end{aligned} \tag{36}$$

Assim,

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases} \tag{37}$$

Vamos agora desenhar o retrato de fases deste sistema:

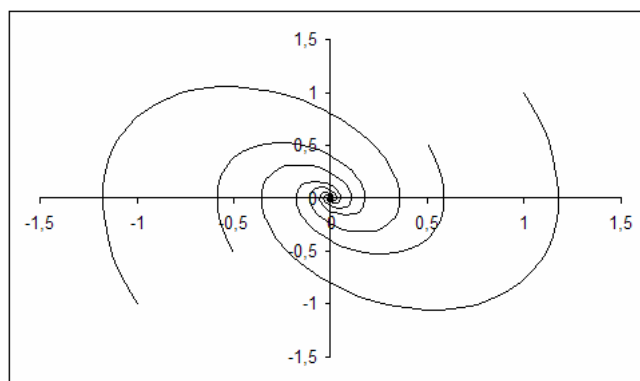


Figura 18: Retrato de fases para o sistema 37.

Este retrato de fases mostra uma espiral assintoticamente estável no ponto $(0,0)$. Para confirmar esta conclusão, utiliza-se a aproximação linear ao redor do ponto de equilíbrio, que nos é dada pela matriz jacobiana.

Igualando ambas as equações à zero, encontra-se um ponto de equilíbrio em $(0,0)$. A matriz jacobiana calculada neste ponto fica como a seguir:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Esta matriz apresenta, como auto-valores, $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Consultando a Tabela 1, percebe-se que este ponto deve se tratar de um ponto espiral assintoticamente estável, o que está de acordo com o que foi observado no retrato de fases desenhado.

Um último exemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (39)$$

Seu retrato de fases encontra-se a seguir:

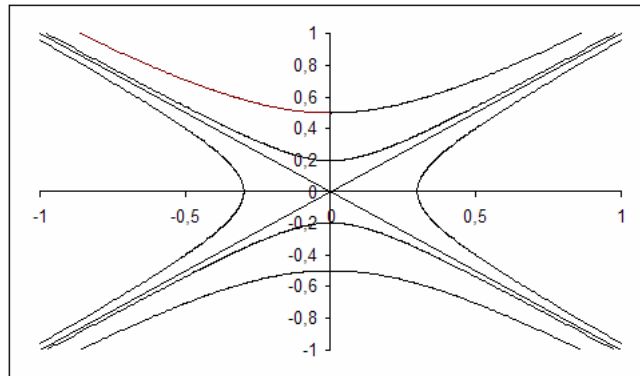


Figura 19: *Retrato de fases para o sistema 39.*

Este retrato de fases mostra um ponto de sela em $(0,0)$. Para confirmar esta constatação, é necessário calcular o ponto de equilíbrio do sistema, linearizá-lo em torno deste ponto com a construção da matriz jacobiana e estudar, então, os auto-valores desta matriz.

Igualando as equações à zero, percebe-se que o ponto de equilíbrio se encontra em $(0,0)$. A matriz jacobiana para este sistema, calculada neste ponto, fica caracterizada como a seguir:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Os auto-valores associados a esta matriz são ± 1 . Da Tabela 1, concluímos que o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela e, portanto, instável, assim como foi observado no retrato de fases.

5 Modelo Dinâmico de Emissão de CO_2

Vamos, agora, aplicar o instrumental até aqui estudado a um modelo dinâmico (CAETANO, M.A.L. et al.; 2007) para a emissão de dióxido de carbono. Este modelo é especificado pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} [\dot{CO}_2] &= r[CO_2] \left(1 - \frac{[CO_2]}{s}\right) - \alpha_1 F + (\alpha_2 - u_2)(GDP) \\ \dot{F} &= u_1(GDP) - hF \\ (\dot{GDP}) &= \gamma(GDP) \end{cases}$$

Aqui, CO_2 representa emissão de gás carbônico, F área florestada, GDP representa Produto Interno Bruto em sua sigla em inglês, r é o parâmetro que indica a taxa de emissão do dióxido de carbono, s o nível de saturação atmosférica, α_1 a proporção de gás carbônico retirado da atmosfera por área florestada, α_2 a porcentagem do PIB que se converte em aumento de emissão de CO_2 , h se refere à taxa de desmatamento de floresta, γ a taxa de crescimento do PIB e u_1 e u_2 as variáveis de controle referentes à, respectivamente, porcentagem do PIB destinada ao reforestamento e à porcentagem do PIB destinado ao desenvolvimento de tecnologias limpas.

As relações entre as variáveis e parâmetros do modelo são representadas a seguir:

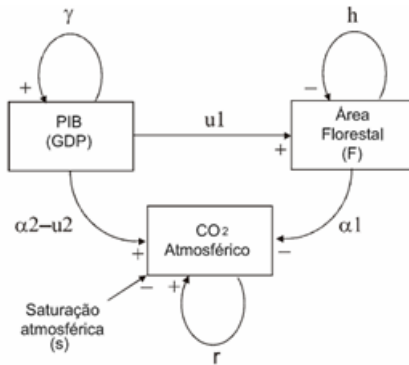


Figura 20: Relações entre variáveis e parâmetros do modelo.

Aqui, é necessária a pesquisa para obtenção de dados reais, como valores iniciais para as variáveis em questão, séries históricas destas para comparação com os valores simulados e dados que nos permitam calcular o valor dos parâmetros do modelo. Todas as fontes utilizadas estão explicitadas nas referências bibliográficas.

O seguinte programa, em VBA, produz a simulação do modelo usando dados coletados sobre a Itália:

```

Function f1(co2 As Double, gdp As Double, f As Double, r As Double,
s As Double, alfa1 As Double, alfa2 As Double, u1 As Double, u2 As
Double, gama As Double, h As Double, t As Integer) As Double
    f1 = r * co2 * (1 - (co2 / s)) - alfa1 * f + (alfa2 - u2) * gdp
End Function

```

```

Function f2(co2 As Double, gdp As Double, f As Double, r As Double,
s As Double, alfa1 As Double, alfa2 As Double, u1 As Double, u2 As
Double, gama As Double, h As Double, t As Integer) As Double
    f2 = u1 * gdp - h * f
End Function

```

```

Function f3(co2 As Double, gdp As Double, f As Double, r As Double,
s As Double, alfa1 As Double, alfa2 As Double, u1 As Double, u2 As
Double, gama As Double, h As Double, t As Integer) As Double
    f3 = gama * gdp
End Function

```

```

t = 1
h = 0.01
m = 0.0001
co2(0) = 11.313 ' emissão
f(0) = 0.005625 ' área de floresta
gdp(0) = 1.64957 ' pib
u1 = 0.00012 ' porcentagem para reflorestamento
u2 = 0.0008 ' porcentagem para clean_tech
s = 120 ' capacidade da atmosfera
r = 0.45 ' taxa de emissão
gama = 0.01 ' crescimento do pib
alfa1 = 0.0006 ' qnto floresta remove de co2
alfa2 = 0.0005 ' relação pib produção de co2

```

```

For i = 0 To 4999
    t = t + h
    k11 = f1(CDbl(co2(i)), CDbl(gdp(i)), CDbl(f(i)), CDbl(r), CDbl(s),
CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),
CInt(t))
    k12 = f2(CDbl(co2(i)), CDbl(gdp(i)), CDbl(f(i)), CDbl(r), CDbl(s),
CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),
CInt(t))

```

$k13 = f3(CDbl(co2(i)), CDbl(gdp(i)), CDbl(f(i)), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $dx21 = co2(i) + (h / 2) * k11$
 $dx22 = f(i) + (h / 2) * k12$
 $dx23 = gdp(i) + (h / 2) * k12$
 $k21 = f1(CDbl(dx21), CDbl(dx22), CDbl(dx23), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $k22 = f2(CDbl(dx21), CDbl(dx22), CDbl(dx23), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $k23 = f3(CDbl(dx21), CDbl(dx22), CDbl(dx23), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $dx31 = co2(i) + (h / 2) * k21$
 $dx32 = f(i) + (h / 2) * k22$
 $dx33 = gdp(i) + (h / 2) * k22$
 $k31 = f1(CDbl(dx31), CDbl(dx32), CDbl(dx33), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $k32 = f2(CDbl(dx31), CDbl(dx32), CDbl(dx33), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $k33 = f3(CDbl(dx31), CDbl(dx32), CDbl(dx33), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $dx41 = co2(i) + h * k31$
 $dx42 = f(i) + h * k32$
 $dx43 = gdp(i) + h * k32$
 $k41 = f1(CDbl(dx41), CDbl(dx42), CDbl(dx43), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $k42 = f2(CDbl(dx41), CDbl(dx42), CDbl(dx43), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $k43 = f3(CDbl(dx41), CDbl(dx42), CDbl(dx43), CDbl(\tau), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CInt(t))$
 $co2(i + 1) = co2(i) + (h / 6) * (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 + k41)$
 $f(i + 1) = f(i) + (h / 6) * (k12 + 2 * k22 + 2 * k32 + k42)$
 $gdp(i + 1) = gdp(i) + (h / 6) * (k13 + 2 * k23 + 2 * k33 + k43)$
Next i

O código inteiro para este programa encontra-se no anexo 8. Analisando o gráfico para os valores simulados da variável CO_2 comparados com dados reais, no período de tempo de 1950 a 2003, é possível verificar como aqueles se aproximam destes:

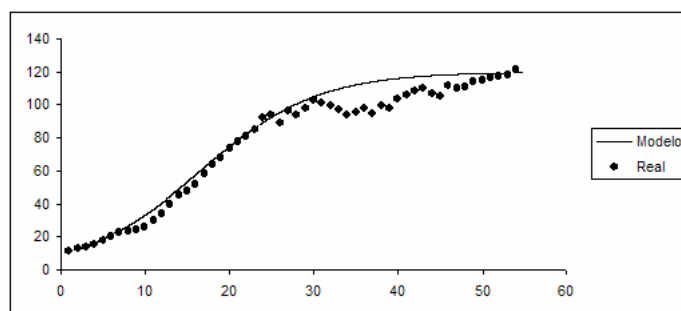


Figura 21: *Simulação do modelo para a Itália.*

O *Excel*, aqui, começa a demonstrar suas limitações: mais expressivo, o problema do passo fixo. Em períodos de maior variação nos valores referentes à emissão de gás carbônico, os erros associados à aproximação se tornam maiores. De maneira análoga, momentos em que esta variação não é expressiva, o passo da integração poderia ser diminuído, para poupar tempo de processamento.

Uma solução para este problema é a utilização de uma função do programa *MatLab* chamada *ode45*. Esta função é baseada no par (4,5) de Dormand-Prince para a fórmula de Runge-Kutta. Em especial, aqui é utilizado um passo variável, trazendo maior precisão na integração.

O código a ser escrito também fica bastante simplificado, uma vez que não é preciso criar o programa para a integração propriamente dita. O primeiro passo é criar a função que contém o sistema de equações e a iniciação das variáveis que conterão os parâmetros e as condições iniciais. No caso, esta função está contida em um arquivo *f.m*, a seguir:

```
function dx = f(t,y)
    global h
    global u1
    global u2
    global s
    global r
    global gama
    global alfa1
    global alfa2

    % valores iniciais
```

```

    co2 = y(1);
    f = y(2);
    gdp = y(3);

    % modelo
    dx = [ r * co2 * (1 - (co2 / s)) - alfa1 * f + (alfa2 - u2) * gdp ;
    u1 * gdp - h * f ; gama * gdp ];

```

Agora, o programa propriamente dito:

```

type f;

global h
global u1
global u2
global s
global r
global gama
global alfa1
global alfa2

% PARAMETROS
h = 0.0001;    % desmatamento
u1 = 0.0011;   % porcentagem do PIB para reflorestamento
u2 = 0.0008;   % porcentagem do PIB para clean tech
s = 120;       % saturação atmosférica
r = 0.15;      % taxa de emissão
gama = 0.044;  % crescimento do PIB
alfa1 = 0.0006; % capacidade de remoção de CO2 de F
alfa2 = 0.0005; % relação PIB produção de CO2

% CONDICAOES INICIAIS
t0 = 1950;
tfinal = 2007;
y0 = [11.313 56 164.957]

% INTEGRACAO NUMERICA
options = odeset('RelTol', 1e-6, 'AbsTol', [1e-6]);
[t,y] = ode45('f', [t0 tfinal],y0,options);

```

Na primeira linha, “type f” carrega a função contida em *f.m*. Após isto, as variáveis são inicializadas e a integração é feita utilizando a função ode45.

Plotando em um gráfico os dados simulados para CO_2 , área de floresta e PIB juntamente com dados reais coletados para estas variáveis, o resultado é o a seguir:

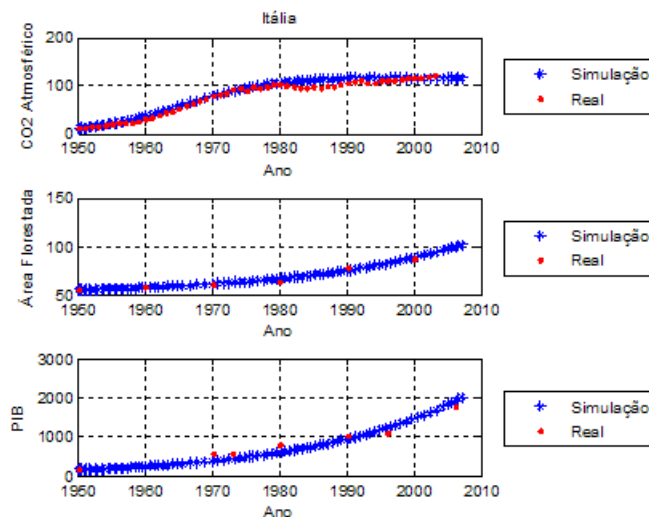


Figura 22: *Simulação do modelo para a Itália via MatLab.*

Aqui, é possível verificar que a simulação se ajusta bem aos dados reais durante todo o período para área florestada (FAOSTAT, 2007) e PIB (MADISON, 2001). Para emissão de CO_2 é possível observar que, a partir de 1980, a variabilidade dos dados reais, obtidos do site Online Trends (2007), aumenta. Porém, os dados simulados continuam próximos dos dados reais. O código completo do programa, incluindo as funções de plotagem, encontram-se no Anexo 9.

Alterando o programa acima, é possível ajustar a simulação para outros países. Abaixo, as simulações para a Alemanha e para o Reino Unido:

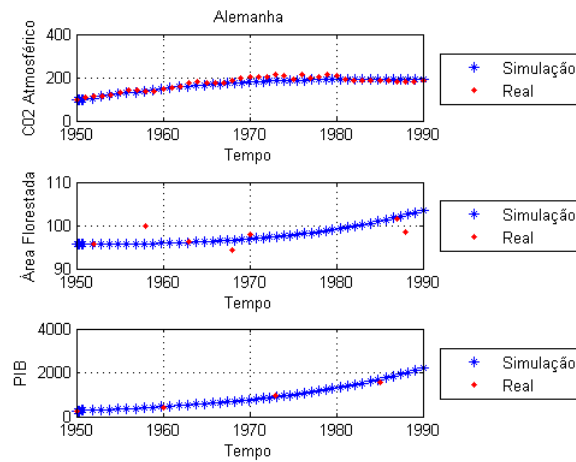


Figura 23: *Simulação do modelo para a Alemanha via MatLab.*

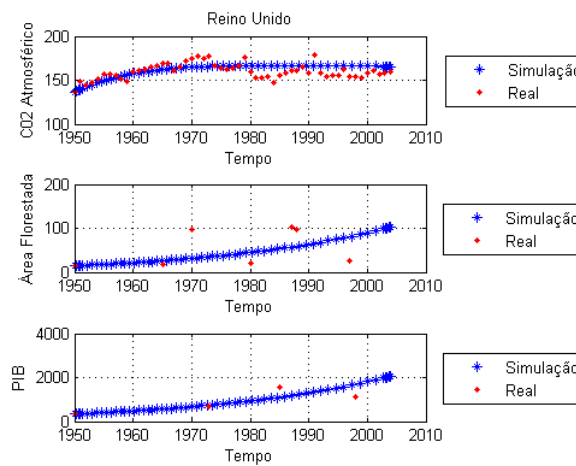


Figura 24: *Simulação do modelo para a Alemanha via MatLab.*

É possível observar, no caso da Alemanha, a boa adequação do modelo aos dados reais para emissões de CO_2 e PIB. Quanto à variável Área Florestada, os dados reais apresentam alta volatilidade, mas o modelo conseguiu captar a tendência geral. No caso do Reino Unido, apesar da maior volatilidade dos dados reais relacionados a emissões de CO_2 , o modelo se parece bem ajustado a todas as variáveis. Os parâmetros para estas simulações encontram-se no Anexo 10.

6 Controle Ótimo

A Teoria de Controle Ótimo é um método matemático de otimização baseado largamente nos estudos de Lev Pontryagin. Ela nos mostra como resolver problemas de maximização, em um tempo contínuo, cuja função objetivo inclui uma integral e as restrições incluem pelo menos uma equação diferencial (KAMIEN e SCHWARTZ, c1981).

O princípio máximo de Pontryagin nos mostra as condições que são necessárias para maximizar o valor da função objetivo sujeita às restrições. Estas condições podem ser verificadas através da maximização da seguinte função exemplo:

$$\text{Min } J[u(\cdot)] = \int_0^T L(x, u, t) dt \quad (41)$$

sob a seguinte restrição:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (42)$$

ainda, tem-se que:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ 0 < T &\leq \infty \end{aligned} \quad (43)$$

Em problemas deste tipo, as variáveis são separadas em duas classes distintas: passam a existir as variáveis de *estado*, representadas pela variável x no exemplo exposto, e variáveis de controle, representadas pela variável u .

Então, um problema de controle ótimo pode ser resumidamente sintetizado como uma tentativa de determinação do caminho das variáveis de controle que satisfaçam as restrições apresentadas e que, além do mais, minimizam (ou maximizam) o critério de performance (índice de performance J) apresentado.

Dada a definição formal, o primeiro passo para a resolução de tais problemas é a definição da função Hamiltoniana (KLEIN, 2005):

$$H(x, u, t) = L(x, u, t) + \lambda f(x, u, t) \quad (44)$$

Pela Lei de Controle Ótimo de Pontryagin, a primeira condição diz que a Hamiltoniana não deve variar com a variável de controle u . Assim:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (45)$$

Desta relação é retirada a forma ótima para a variável de controle, u^* .

Além disso, tem-se que:

$$\lambda^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (46)$$

Esta última equação é chamada de adjunta e, é importante notar, existirá uma adjunta para cada restrição do problema. Enfim, o problema original é reescrito utilizando as relações descobertas:

$$\text{Min } J[u(\cdot)] = \int_0^T L(x, u, t) dt \quad (47)$$

com as seguintes restrições

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u^*, t) \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (48)$$

e

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ 0 < T &\leq \infty \end{aligned} \quad (49)$$

Por fim, resolve-se a adjunta e, então, o estado.

Analisando, agora, um exemplo numérico de minimização da variável de controle:

$$\text{Min } J = \int_0^1 u^2 dt \quad (50)$$

sujeito à seguinte restrição:

$$\dot{x} = x + u \quad (51)$$

e, ainda,

$$\begin{aligned} x(0) &= 10 \\ x(1) &= 5 \end{aligned} \quad (52)$$

A Hamiltoniana para este problema fica caracterizada como a seguir:

$$H = u^2 + \lambda(x + u) \quad (53)$$

Pela Lei de Controle Ótimo, tem-se que:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (54)$$

então:

$$u^* = -\frac{\lambda}{2} \quad (55)$$

Resolvendo a adjunta:

$$\lambda^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (56)$$

então:

$$\dot{\lambda} = -\lambda \quad (57)$$

Assim, o problema original pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\text{Min } J = \int_0^1 u^2 dt \quad (58)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + u \\ \dot{\lambda} = -\lambda \end{cases} \quad (59)$$

e, ainda,

$$\begin{aligned} x(0) &= 10 \\ x(1) &= 5 \end{aligned} \quad (60)$$

Resolvendo a adjunta:

$$\dot{\lambda} = -\lambda \Leftrightarrow \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -1 \Leftrightarrow \lambda = c_1 e^{-t} \quad (61)$$

Passa-se, agora, para o estado:

$$\dot{x} = x - \frac{c_1 e^{-t}}{2} \Leftrightarrow \dot{x} - x = -\frac{c_1 e^{-t}}{2} \quad (62)$$

Utilizando, como fator de integração, $\mu = e^{-t}$, resolve-se o estado:

$$e^{-t} \dot{x} - e^{-t} x = -\frac{c_1 e^{-2t}}{2} \Leftrightarrow (e^{-t} x)' = \frac{c_1 e^{-2t}}{2} \quad (63)$$

Integrando dos dois lados:

$$\int_0^1 (e^{-t} \dot{x}) = \int_0^1 \frac{c_1 e^{-2t}}{2} \quad (64)$$

temos:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \quad (65)$$

Ao resolver o problema para os valores de contorno, descobre-se as constantes:

$$\begin{aligned} c_1 &\cong 9.43788 \\ c_2 &\cong 0.56212 \end{aligned} \quad (66)$$

Como segundo exemplo, tem-se uma fórmula clássica na física:

$$F = ma \Leftrightarrow F = m\ddot{x} \quad (67)$$

Utilizando variáveis de transformação, esta equação diferencial de segundo grau pode ser reescrita em um sistema de equações diferenciais de primeiro grau:

$$\begin{aligned} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (68)$$

Com este sistema, é possível montar o seguinte problema de otimização:

$$\text{Min } J = \int_0^4 (x_1^2 + x_2^2 + u^2) \quad (69)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (70)$$

às seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 10 \\ x_2(0) &= 10 \end{aligned} \quad (71)$$

e às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} x_1(4) &= 5 \\ x_2(4) &= 5 \end{aligned} \quad (72)$$

Por (45), tem-se que o estado ótimo para este problema é dado por:

$$u^* = -\frac{\lambda_2}{2} \quad (73)$$

As adjuntas, por (46), são caracterizadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -2x_1 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 - 2x_2 \end{aligned} \quad (74)$$

Como a resolução numérica deste problema não é mais trivial, ela será feita pela função do *MatLab* *BVP4C*, onde são configurados os valores iniciais e finais para cada variável, a hamiltoniana do problema, a equação do estado e das adjuntas, assim como chutes iniciais para a solução do problema. A função *BVP4C* é, então, chamada:

```
solinit = bvpinit(linspace(0,1,101),@EnergInit);
options = bvpset('Stats','on','RelTol',[1e-6]);
sol = bvp4c(@EnergM,@EnergRes,solinit,options);
```

Abaixo, os resultados plotados em gráficos:

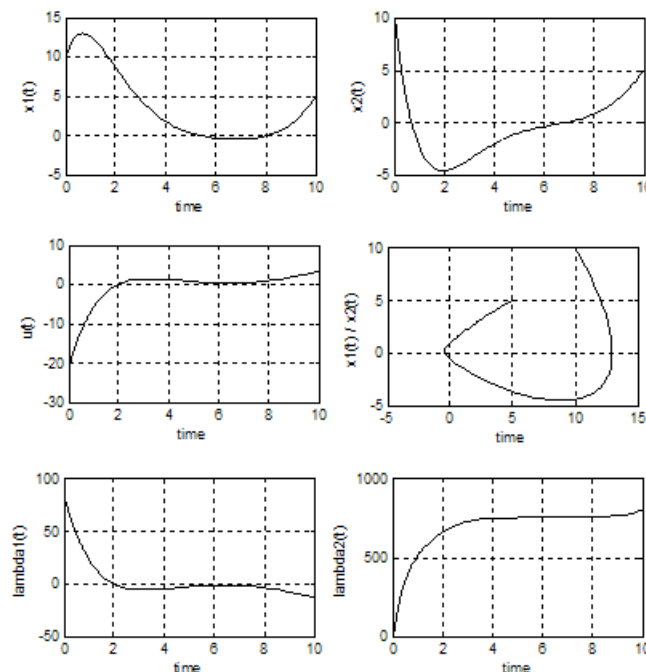


Figura 25: Resolução do problema 69.

Agora, um exemplo que modifica a maneira como o índice de performance é apresentado:

$$\text{Min } J[u(\cdot)] = h + \int_0^T Q(x(t) - b)^2 + u^2 dt \quad (75)$$

Sendo h uma função da forma $h = H(x(t_f - a)^2)$, é possível então apresentar a noção de *condição de transversalidade* (KIRK, 2004). Aqui, H pune o funcional, obrigando-o a chegar à posição a final do estado, enquanto Q , por sua vez, pune a trajetória assumida por ele. Quanto maior o valor de H , mais próximo de a o estado final estará, enquanto que quanto maior Q , mais perto de b a trajetória assumida pelo estado estará.

Como exemplo, o seguinte problema:

$$\text{Min } J = 100(x(t_f) - 3)^2 \int_0^{t_f} 100(x - 5)^2 + u^2 dt \quad (76)$$

Sujeito a:

$$\dot{x} = -x + u \quad (77)$$

Com:

$$x(0) = 1 \quad (78)$$

$$x(t_f) = \text{livre} \quad (79)$$

$$t_f = 1 \quad (80)$$

A diferença, aqui, se dá na condição final para a adjunta. Esta condição não é mais nula:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial [100(x(t_f) - 3)^2]}{\partial x(t_f)} \quad (81)$$

$$\lambda(t_f) = 200(x(t_f) - 3) \quad (82)$$

Abaixo, o resultado da simulação deste problema pela função *BVP4C*, do *MatLab*:

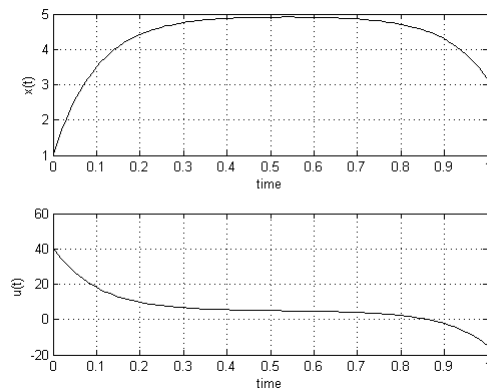


Figura 26: *Condição de transversalidade em problema de controle ótimo.*

Como é possível ver, a trajetória gira em torno do valor cinco, pelo alto peso do parâmetro equivalente ao parâmetro Q neste problema, e o estado termina muito próximo ao valor três, por ser este o objetivo do equivalente à função h .

6.1 Controle Ótimo Aplicado ao Modelo Dinâmico de Emissão de CO₂

Agora é a hora de aplicar a teoria até aqui desenvolvida e treinada ao estudo do modelo dinâmico de emissão de CO₂ apresentado no Capítulo 5. Para relembrar:

$$\begin{cases} [\dot{CO}_2] &= r[CO_2] \left(1 - \frac{[CO_2]}{s}\right) - \alpha_1 F + (\alpha_2 - u_2)(GDP) \\ \dot{F} &= u_1(GDP) - hF \\ (G\dot{D}P) &= \gamma(GDP) \end{cases} \quad (83)$$

Com este modelo, é possível montar um problema de otimização e utilizar a teoria apresentada no começo deste capítulo para encontrar o caminho ótimo das variáveis de controle utilizadas e, ao mesmo tempo, satisfazer condições finais para as variáveis que podem representar, por exemplo, metas de redução de emissões do gás dióxido de carbono.

Formalizando o problema, é possível ter:

$$\text{Min } J = \int_0^{tf} [a([CO_2] - final)^2 - bu_1^2 - cu_2^2] dt \quad (84)$$

Sujeito às restrições apresentadas em (83) e às condições iniciais a seguir:

$$[CO_2](0) = [CO_2]_0 \quad (85)$$

$$F(0) = F_0 \quad (86)$$

$$GDP(0) = GDP_0 \quad (87)$$

E, ainda, com o tempo final fixo e com os seguintes valores de contorno:

$$[CO_2](tf) = livre \quad (88)$$

$$F(tf) = livre \quad (89)$$

$$GDP(tf) = livre \quad (90)$$

Definindo a Hamiltoniana para este problema, tem-se:

$$H = a([CO_2] - final)^2 - bu_1^2 - cu_2^2 + \lambda_1[\dot{CO}_2] + \lambda_2(\dot{F}) + \lambda_3(G\dot{D}P) \quad (91)$$

Aqui, o objetivo é minimizar a diferença entre o quadrado da diferença da quantidade de emissão de CO_2 na atmosfera com o parâmetro *final*, que representa a trajetória para a qual esta variável de estado será levada, com o quadrado dos controles para reflorestamento e investimento em tecnologia limpa. Os parâmetros a , b e c representam, respectivamente, a importância relativa da variável de estado CO_2 e das variáveis de controle u_1 e u_2 .

Como vimos pela Lei de de Controle Ótimo de Pontryagin, a Hamiltoniana não deve variar com os controles. Desta condição de otimização, tem-se:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \quad (92)$$

$$2bu_1 + \lambda_2(GDP) = 0 \quad (93)$$

$$u_1^* = \frac{\lambda_2(GDP)}{2b} \quad (94)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \quad (95)$$

$$2u_2 - \lambda_1(GDP) = 0 \quad (96)$$

$$u_2^* = -\frac{\lambda_1(GDP)}{2c} \quad (97)$$

Agora, as condições referentes às adjuntas. Como o problema é constituído de três restrições, referentes às equações do modelo, têm-se três adjuntas. De (46), as condições para a otimização a seguir:

$$\lambda_1^* = -\frac{\partial H}{\partial [CO_2]} \quad (98)$$

$$\lambda_2^* = -\frac{\partial H}{\partial F} \quad (99)$$

$$\lambda_3^* = -\frac{\partial H}{\partial (GDP)} \quad (100)$$

Então:

$$\lambda_1^* = -2([CO_2] - final) - \lambda_1(r - \frac{2rCO_2}{s}) \quad (101)$$

$$\lambda_2^* = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2h \quad (102)$$

$$\lambda_3^* = -[\lambda_1(\alpha_2 - u_2) + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 \gamma] \quad (103)$$

Foram conseguidos, através da simulação da função do *MatLab BVP4C*, os resultados apresentados a seguir.

Abaixo, a trajetória ótima da variável de estado referente a emissões de CO_2 para a Itália, no período de 1950 a 1980, com o parâmetro *final* igual a 17:

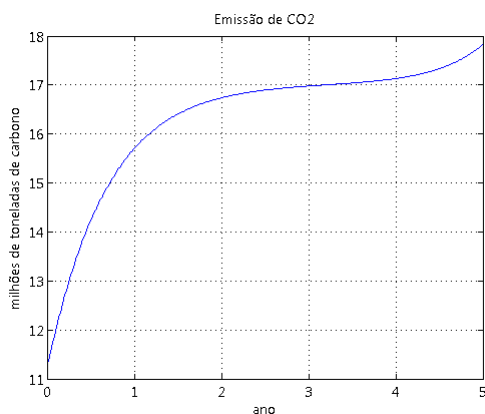


Figura 27: *Trajetoária ótima de emissões para a Itália.*

Quanto à trajetória referente a área de floresta, temos um resultado peculiar. Pela simulação, ela diminui no período analisado:

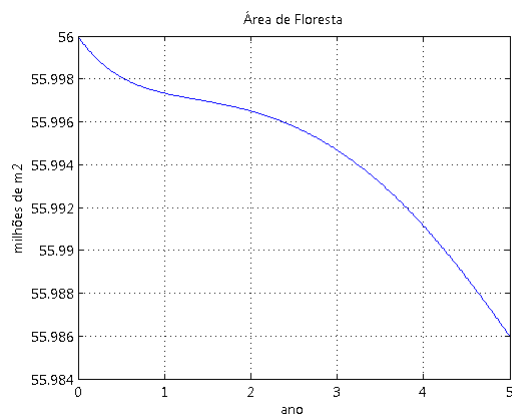


Figura 28: *Trajetoária ótima de floresta para a Itália.*

Discutiremos este resultado a seguir.

Trajetoária ótima para o PIB:

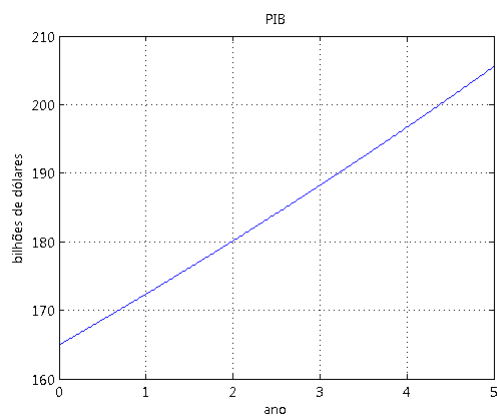


Figura 29: *Trajétoria ótima de PIB para a Itália.*

Por fim, as trajetórias dos controles referentes a investimentos em reflorestamento e em criação de tecnologia limpa, também trazendo resultados peculiares:

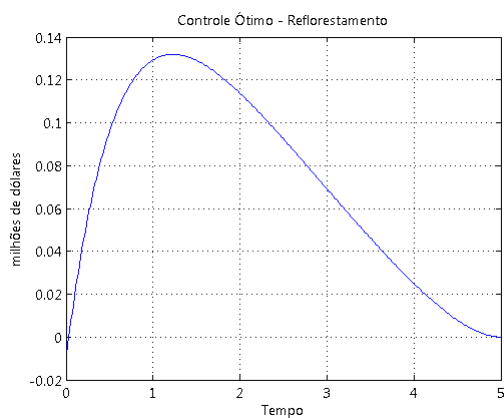


Figura 30: *Trajétoria ótima do controle referente a reflorestamento para a Itália.*

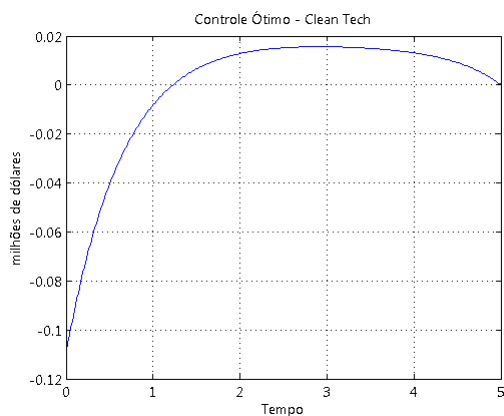


Figura 31: *Trajetoária ótima do controle referente a desenvolvimento de tecnologia limpa para a Itália.*

Agora, os resultados para a França, para o mesmo período de 1950 a 1955, com o parâmetro *final* igual a 63, começando pela trajetória ótima de emissões de dióxido de carbono:

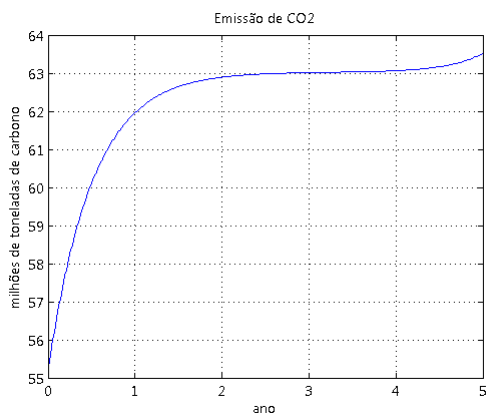


Figura 32: *Trajetoária ótima de emissões para a França.*

Aqui, área florestada também diminui, no período analisado:

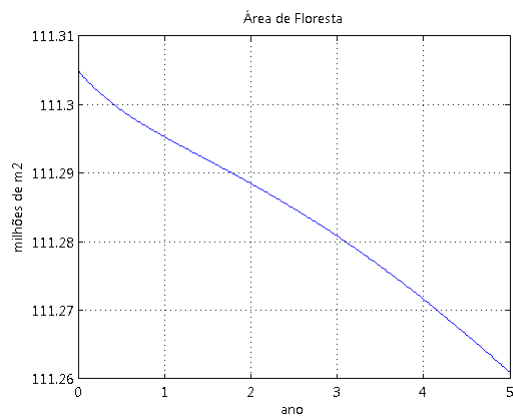


Figura 33: *Trajétoria ótima de floresta para a França.*

Trajétoria ótima para o PIB:

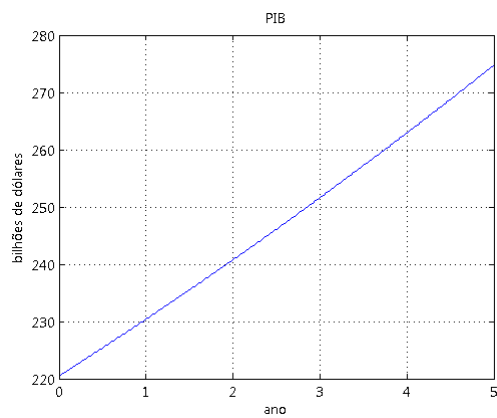


Figura 34: *Trajétoria ótima de PIB para a França.*

E trajetórias para as variáveis de controle, que têm comportamento similar às para a Itália:

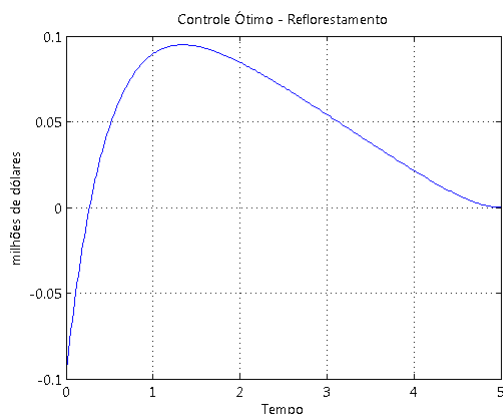


Figura 35: *Trajétória ótima do controle referente a reflorestamento para a França.*

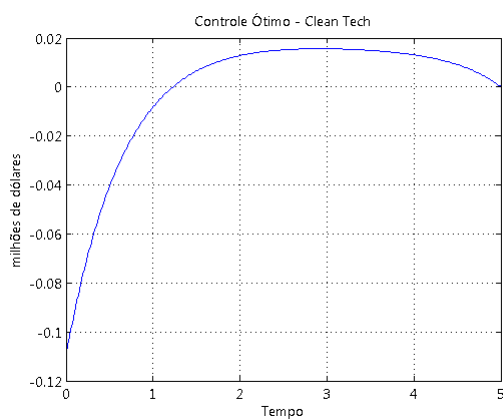


Figura 36: *Trajétória ótima do controle referente a desenvolvimento de tecnologia limpa para a França.*

Esta formulação do controle ótimo serviu para mostrar a possibilidade de se influenciar a trajetória de uma variável de estado do modelo, no caso emissões de CO_2 . Interessante notar as trajetórias ótimas conseguidas para a área de floresta: elas são decrescentes. Analisando as trajetórias dos controles, porém, é possível entender, em parte, o porquê deste resultado.

As variáveis de controle referentes a incentivos de reflorestamento começam com uma trajetória ascendente, mas logo entre o primeiro e o segundo ano revertem seu sentido, acabando o período tendendo a zero. O incentivo a reflorestamento, aqui, claramente não compensou a perda de floresta decorrente de atividades de desmatamento em ambos os países.

As variáveis de controle referentes ao desenvolvimento de tecnologia limpa,

por sua vez, começam sua trajetória em valores negativos, o que não seria coerente com o seu sentido real, por não ser possível investimentos de valores negativos.

Apesar de ser possível observar o caminho das soluções aqui encontradas e tirar conclusões a partir disto, o resultado encontrado não é satisfatório, visto a incongruência obtida na sugestão de valores negativos para investimento. É necessário, então, a alteração do índice de performance utilizado.

Avançando no desenvolvimento do funcional, é possível a inclusão de uma taxa de desconto δ para as mudanças climáticas futuras. Além da taxa de desconto, é pertinente incluir aqui também a condição de transversalidade discutida no final da introdução da seção 6. Esta condição pressionará o estado final das emissões de dióxido de carbono a um valor determinado. O índice de performance fica, então, como a seguir:

$$\text{Min } J = 100(x(t_f) - 17) + \int_0^{t_f} e^{-\delta t} [a([CO_2] - final)^2 - bu_1^2 - cu_2^2] dt \quad (104)$$

Mantendo as condições iniciais e os valores de contorno dos exemplos anteriores, é necessário alterar a função Hamiltoniana do problema:

$$H = e^{-\gamma t} [a([CO_2] - final)^2 - bu_1^2 - cu_2^2] + \lambda_1 [C\dot{O}_2] + \lambda_2 (\dot{F}) + \lambda_3 (G\dot{D}P) \quad (105)$$

As leis de controle, então, passam a ser caracterizadas por:

$$u_1^* = \frac{\lambda_2(GDP)}{2b e^{-\delta t}} \quad (106)$$

$$u_2^* = -\frac{\lambda_1(GDP)}{2c e^{-\delta t}} \quad (107)$$

E as adjuntas por:

$$\lambda_1^* = -2a([CO_2] - final)e^{-\delta t} - \lambda_1 \left(r - \frac{2rCO_2}{s} \right) \quad (108)$$

$$\lambda_2^* = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 h \quad (109)$$

$$\lambda_3^* = -[\lambda_1(\alpha_2 - u_2) + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 \gamma] \quad (110)$$

$$\lambda(t_f) = 200(x(t_f) - final2) \quad (111)$$

A seguir, os resultados da simulação para a Itália no período de 1950 a 1980:

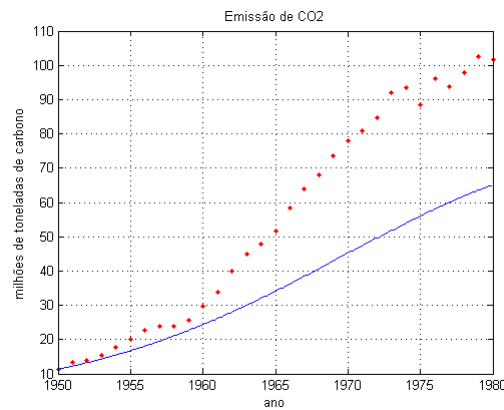


Figura 37: *Trajетória ótima de emissões para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.*

Neste gráfico é possível comparar a solução simulada, apresentada pela reta contínua, aos dados reais, em pontilhado.

Abaixo, área florestada:

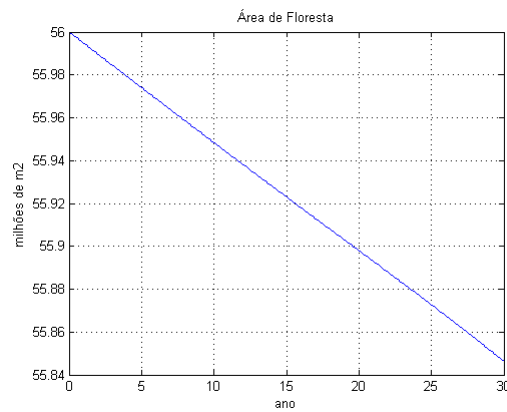


Figura 38: *Trajетória ótima de floresta para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.*

Trajетória ótima para o PIB:

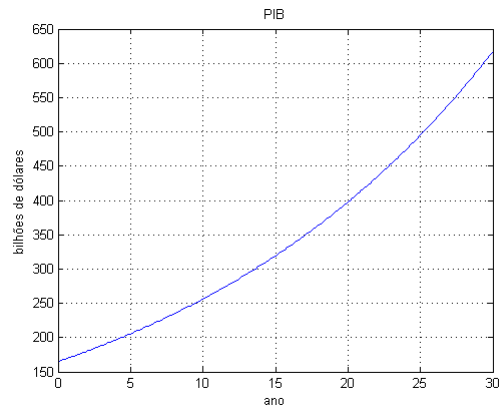


Figura 39: *Trajétória ótima de PIB para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.*

E trajetórias para as variáveis de controle:

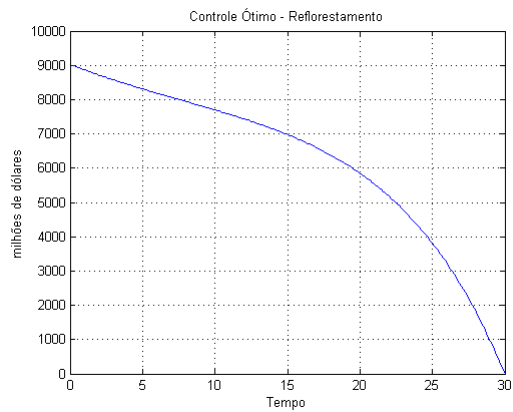


Figura 40: *Trajétória ótima do controle referente a reforestamento para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.*

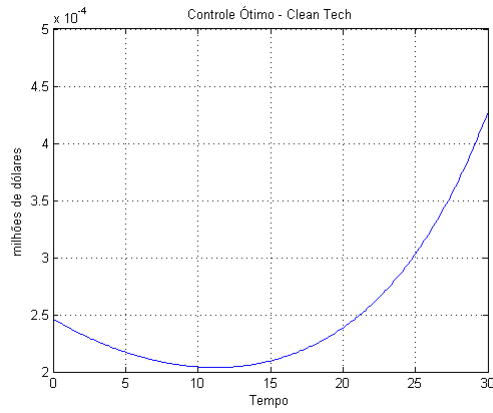


Figura 41: *Trajétória ótima do controle referente a desenvolvimento de tecnologia limpa para a Itália, projeção de 30 anos a partir de 1950.*

Agora, os resultados da simulação para a Alemanha no período de 1950 a 1970:

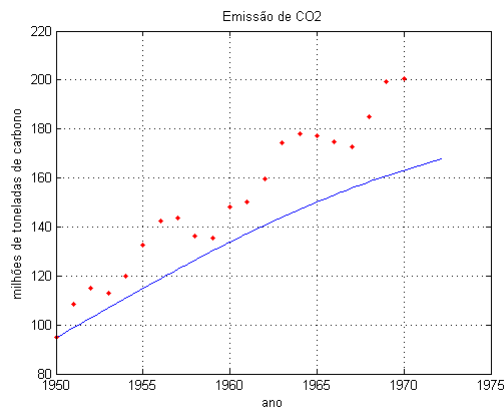


Figura 42: *Trajétória ótima de emissões para a Alemanha, projeção de 15 anos a partir de 1950.*

Aqui também é possível comparar a solução simulada, apresentada pela reta contínua, aos dados reais, em pontilhado.

Abaixo, área florestada:

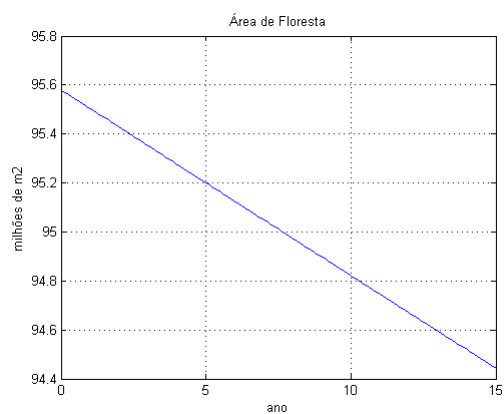


Figura 43: *Trajectoria ótima de floresta para a Alemanha, projeção de 15 anos a partir de 1950.*

Trajectoria ótima para o PIB:

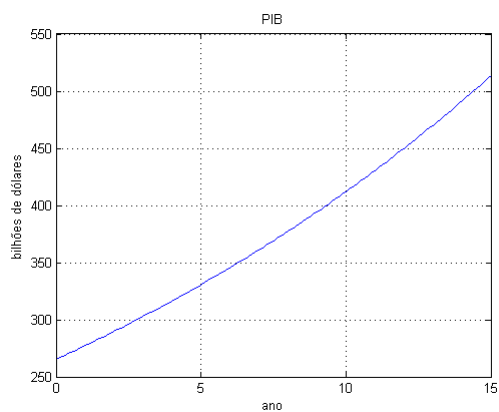


Figura 44: *Trajectoria ótima de PIB para a Alemanha, projeção para 15 anos a partir de 1950.*

E trajetórias para as variáveis de controle:

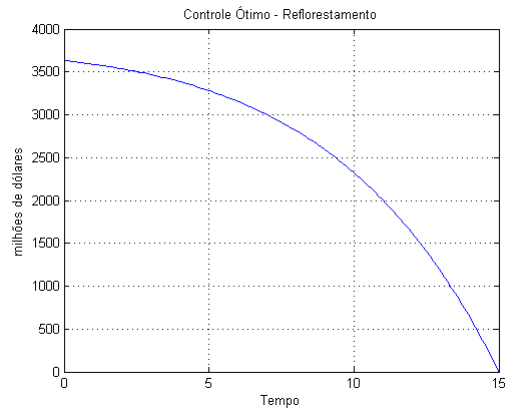


Figura 45: *Trajétória ótima do controle referente a reflorestamento para a Alemanha, projeção para 15 anos a partir de 1950.*

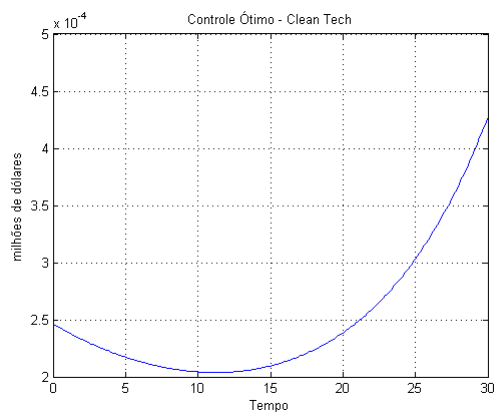


Figura 46: *Trajétória ótima do controle referente a desenvolvimento de tecnologia limpa para a Alemanha, projeção para 15 anos a partir de 1950.*

Importante notar que os dados reais aqui utilizados foram conseguidos no site Online Trends (2007).

Com uma redução de quase 30% do valor final da variável de estado referente a quantidade em toneladas de dióxido de carbono emitido para a Itália e de redução de 20% no valor final da mesma variável para a Alemanha, as restrições impostas à suas trajetórias e ao seus estados finais surtiram os efeitos desejados. Os resultados referentes às variáveis de controle, agora, são coerentes, apresentando valores estritamente positivos. Não obstante, o investimento ótimo em reflorestamento também não foi suficiente para compensar o desmatamento em ambos os países. Os parâmetros referentes às simulações aqui apresentadas estão no Anexo 11.

7 Conclusão

Cientistas e ambientalistas vêm alertando há anos sobre a possibilidade de que emissões desenfreadas de certos gases na atmosfera, entre eles o dióxido de carbono, podem causar mudanças climáticas irreparáveis. Tais alertas passaram boa parte das últimas décadas ignorados, mas recentes acontecimentos referentes ao clima do planeta têm mudado este cenário.

Através deste trabalho, foram utilizadas técnicas de modelagem dinâmica de fenômenos através do uso de equações diferenciais. Estas técnicas permitiram o uso de um modelo proposto na literatura para emissões de dióxido de carbono na atmosfera. Técnicas de controle ótimo foram discutidas e utilizadas para o problema de minimização de emissões deste gás.

Mas, para chegar neste ponto, foram revisados conceitos de equações diferenciais, programação em VBA no *Excel* para a resolução numérica destas, e analisados seus pontos de equilíbrio e principais características. Quando o *Excel* passou a não apresentar mais o nível de performance desejado para as resoluções, passou-se então a utilizar o software *MatLab* e suas funções de resolução de equações diferenciais e de otimização dinâmica.

O modelo criado e discutido por Caetano et al. (2007) foi então apresentado e usado na modelagem da emissão de gás carbônico na atmosfera por diferentes países, para, depois, ser apresentada a teoria de Controle Ótimo. Com esta teoria, foi possível modelar os caminhos ótimos para as variáveis de controle contidas no modelo citado. Estes caminhos devem obedecer as restrições impostas pelo problema de controle ótimo, além de minimizar o índice de controle ótimo utilizado.

Os resultados encontrados demonstram a eficácia dos investimentos em reflorestamento e em desenvolvimento de tecnologia limpa. Apesar do alto investimento inicial em reflorestamento, este se reduziu ao longo do período nos exemplos simulados. Em contra partida, este foi então substituído por investimentos de menor proporção em desenvolvimento de tecnologia limpa, que garantiram a obtenção da redução das emissões de dióxido de carbono.

Isto mostra que a o plantio de árvores para retirada de gás carbônico da atmosfera não é uma estratégia eficaz no longo prazo. Tal resultado está de acordo com a intuição, pois caso o reflorestamento se desse sem esforços na redução das emissões deste gás, é de se esperar que o aumento destas emissões mais que anulem o efeito desta estratégia. Assim, o investimento em desenvolvimento de tecnologias que permitam a redução destas mostrou-se ser a estratégia predominante do ponto de vista econômico.

Além disso, o modelo aqui utilizado mostrou eficácia na descrição e na predição da dinâmica de relações entre emissões de CO_2 , área florestada e PIB. A precisão dos resultados da abordagem de otimização dinâmica demonstrada, por sua vez, depende de fatores como os pesos de cada variável, seja de estado ou de controle, no índice de performance utilizado. Porém, os resultados puderam ilustrar a eficácia relativa de cada tipo de investimento nas áreas de interesse do estudo.

Referências

- [1] ANSWERS. *Dormand-Prince*. Disponível em: <<http://www.answers.com/topic/dormand-prince?cat=technology>>. Acesso em: outubro 2007.
- [2] BOYCE, W.E.; DiPrima, R. C. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons. (in Portuguese). 1999. 532p.
- [3] CAETANO, M.A.L.; Gheradi, D. F. M.; Yoneyama, T. *Optimal resource management control for CO2 emission and reduction of the greenhouse effect*. Ecological Modelling. 2007.
- [4] FAOSTAT. *Fao corporate document repository*, 2007. European Forest Sector Outlook Study 1960-2000-2020 Main Report. Disponível em: <www.fao.org/docrep/008/ae428e/ae428e00.htm>. Acesso em: março 2007.
- [5] KAMIEN, M. L.; Schwartz, N. L. *Dynamic optimization*. North-Holland. c1981. 331p.
- [6] KIRK, D.; *Optimal control theory - An introduction*. Prentice - Hall. 2004. 464p.
- [7] KLEIN W., M.; *Mathematical methods for economics*. Addison Wesley. 2005. 580p.
- [8] MADDISON, A.. *The World Economy: Historical Statistics*. OECD, Paris. 2003. 653p.
- [9] SANDOVAL, L.; *Auto-valores e auto-vetores (Notas de aula)*. Ibmec-SP. 2006a. 13p.
- [10] SANDOVAL, L.. *Equações diferenciais de segunda ordem homogêneas (Notas de aula)*. Ibmec-SP. 2006b. 12p.
- [11] SANDOVAL, L.. *Introdução às equações diferenciais (Notas de aula)*. Ibmec-SP. 2006c. 14p.
- [12] VOLTERRA, V. *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together*. Animal Ecology. McGraw-Hill. 1931.
- [13] TRENDS, Online. *National Fossil-Fuel CO2 Emissions*. Disponível em: <http://cdiac.ornl.gov/trends/emis/tre_coun.htm>. Acesso em: outubro 2007.
- [14] WIKIPEDIA, the free encyclopedia. *List of regions by past GDP (PPP)*. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_past_GDP_%28PPP%29>. Acesso em: junho 2007.

ANEXOS

1. Crescimento Exponencial

```
Function f(y As Double) As Double
    f = y
End Function
Private Sub CB1_Click()

    Dim y(1 To 20) As Double
    Dim h, t As Single
    Dim i As Integer

    h = CSng(TB1.Text)
    t = 1
    y(1) = Exp(1)
    Worksheets("plan1").Cells(1, 1) = t
    Worksheets("plan1").Cells(1, 2) = y(1)
    Worksheets("plan1").Cells(1, 3) = y(1)

    For i = 2 To 20
        y(i) = y(i - 1) + h * f(y(i - 1))
        t = CSng(t) + CSng(h)
        Worksheets("plan1").Cells(i, 1) = t
        Worksheets("plan1").Cells(i, 2) = y(i)
        Worksheets("plan1").Cells(i, 3) = Exp(t)
    Next i
End Sub
```

2. Juros Compostos

Function f(k As Single, y As Double) As Double

*f = k * y*

End Function

Private Sub CB1_Click()

Dim y(1 To 20) As Double

Dim h, k, S0 As Single

Dim i As Integer

h = CSng(TB1.Text)

t = 0

k = CSng(TB2.Text)

S0 = CSng(TB3.Text)

y(1) = S0

Worksheets("plan2").Cells(1, 1) = t

Worksheets("plan2").Cells(1, 2) = y(1)

Worksheets("plan2").Cells(1, 3) = y(1)

For i = 2 To 20

*y(i) = y(i - 1) + h * f(k, y(i - 1))*

t = CSng(t) + CSng(h)

Worksheets("plan2").Cells(i, 1) = t

Worksheets("plan2").Cells(i, 2) = y(i)

*Worksheets("plan2").Cells(i, 3) = S0 * Exp(k * t)*

Next i

End Sub

3. Exponencial geral

```
Dim n As Single

Function f(b As Single, y As Double) As Double
f = b * y
End Function

Private Sub CB1_Click()
Dim y(1 To 1000) As Double
Dim h, a, b As Single
Dim i As Integer

'limpa a planilha
For i = 1 To 1000
Worksheets("plan3").Cells(i, 1) = ""
Worksheets("plan3").Cells(i, 2) = ""
Worksheets("plan3").Cells(i, 3) = ""
Next i

'incrementação no tempo, passo da integração
h = CSng(TB1.Text)
t = 0
'constante "a" que multiplica a exponencial
a = CSng(TB2.Text)
'valor final do tempo
n = CSng(TB3.Text)
'constante "b" que multiplica o tempo
b = CSng(TB4.Text) y(1) = Exp(a)
Worksheets("plan3").Cells(1, 1) = t
Worksheets("plan3").Cells(1, 2) = y(1)
Worksheets("plan3").Cells(1, 3) = y(1)

For i = 2 To (n / h) + 1
y(i) = y(i - 1) + h * f(b, y(i - 1))
t = CSng(t) + CSng(h)
Worksheets("plan3").Cells(i, 1) = t
Worksheets("plan3").Cells(i, 2) = y(i)
If CSng(S0) = 0 Then
Worksheets("plan3").Cells(i, 3) = Exp(b * t)
```

```

Else
    Worksheets("plan3").Cells(i, 3) = a * Exp(b * t)
End If
Next i
End Sub

Private Sub CB2_Click()
Charts.Add
ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Plan3").Range("A1:C"
& n + 1), PlotBy _
:=xlColumns
ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan3"

ActiveChart.Legend.Select Selection.Delete
End Sub

```

4. Equação Logística

```
Dim n As Single
Function f(proc As Single, lim As Single, t As Single, y As Double) As Double
    f = proc * y - lim * y ^ 2
End Function

Private Sub CB1_Click()
Dim i As Integer
Dim proc, lim, y(0 To 1000), y2(0 To 1000), t As Single

t = 0 h = CSng(TB1.Text)
k = CSng(TB2.Text)
n = CSng(TB3.Text)
l = CSng(TB4.Text)
y(1) = 1
y2(1) = 1

Worksheets("plan4").Cells(1, 1) = "t"
Worksheets("plan4").Cells(1,2) = "Euler"
Worksheets("plan4").Cells(1, 3) = "Analítico"
Worksheets("plan4").Cells(1, 4) = "Erro"

Worksheets("plan4").Cells(2, 1) = t
Worksheets("plan4").Cells(2, 2) = y(1)
Worksheets("plan4").Cells(2, 3) = y(1)
Worksheets("plan4").Cells(2, 4) = 0

For i = 2 To (n / h) + 1
    t = CSng(t) + CSng(h)
    y(i) = y(i - 1) + h * f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), CDbl(y(i - 1)))
    Worksheets("plan4").Cells(i + 1, 1) = t
    Worksheets("plan4").Cells(i + 1, 2) = y(i)
    Worksheets("plan4").Cells(i + 1, 3) = (k / l) / (1 - (1 - (k / l)) * Exp(-k * t))
    Worksheets("plan4").Cells(i + 1, 4) = Cells(i + 1, 3) - Cells(i + 1, 2) Next i
Next i
```

```

End Sub

Private Sub CB2_Click()
Charts.Add ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Plan4").Range("A1:C102"),
PlotBy _
:=xlColumns
ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan4"

ActiveChart.Legend.Select Selection.Delete
End Sub

Private Sub CB3_Click()
Charts.Add
ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Plan4").Range("A2:A102,D2:D102"),
PlotBy:=xlColumns
ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan4"

ActiveChart.Legend.Select
Selection.Delete
End Sub

```

6. Runge Kutta para Equação Logística

```
Dim n As Single
Function f(proc As Single, lim As Single, t As Single, y As Double) As Double
    f = proc * y - lim * y ^ 2
End Function

Private Sub CB1_Click()
Dim i As Integer
Dim proc, lim, y(0 To 1000), k1, k2, k3, k4, t As Single

t = 0
h = CSng(TB1.Text)
k = CSng(TB2.Text)
n = CSng(TB3.Text)
l = CSng(TB4.Text)
y(1) = 1

Worksheets("plan5").Cells(1, 1) = "t"
Worksheets("plan5").Cells(1, 2) = "RungeKutta"
Worksheets("plan5").Cells(1, 3) = "Analítico"
Worksheets("plan5").Cells(1, 4) = "Erro"

Worksheets("plan5").Cells(2, 1) = t
Worksheets("plan5").Cells(2, 2) = y(1)
Worksheets("plan5").Cells(2, 3) = y(1)
Worksheets("plan5").Cells(2, 4) = y(1) - y(1)

For i = 2 To (n / h) + 1
    t = CSng(t) + CSng(h)

    k1 = f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), CDbl(y(i - 1)))
    k2 = f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), y(i - 1) + (h / 2) * k1)
    k3 = f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), y(i - 1) + (h / 2) * k2)
    k4 = f(CSng(k), CSng(l), CSng(t), y(i - 1) + h * k3)

    y(i) = y(i - 1) + (h / 6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)

    Worksheets("plan5").Cells(i + 1, 1) = t
```

```

        Worksheets("plan5").Cells(i + 1, 2) = y(i)
        Worksheets("plan5").Cells(i + 1, 3) = (k / l) / (1 - (1 - (k /
l * y(1))) * Exp(-k * t))
        Worksheets("plan5").Cells(i + 1, 4) = Cells(i + 1, 3) - Cells(i
+ 1, 2)
    Next i
End Sub

Private Sub CB2_Click()
    Charts.Add
    ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
    ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Plan5").Range("A1:C102"),
PlotBy _
        :=xlColumns
    ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan5"
    ActiveChart.Legend.Select
    Selection.Delete
End Sub

Private Sub CB3_Click()
    Charts.Add
    ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
    ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Plan5").Range("A2:A102,D2:D102"),
—
    PlotBy:=xlColumns
    ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Plan5"
    ActiveChart.Legend.Select
    Selection.Delete
End Sub

```


7. Runge Kutta para equações de Segunda Ordem

Function f1(x1 As Single, x2 As Single, t As Single) As Single

f1 = x2

End Function

Function f2(x1 As Single, x2 As Single, t As Single) As Single

*f2 = -2 * x1 - 0.125 * x2*

End Function

Sub runge_kutta_segunda_ordem()

Dim x1(0 To 10000) As Single

Dim x2(0 To 10000) As Single

Dim t, h, dx11, dx12, dx21, dx22, dx31, dx32, dx41, dx42 As Single

Dim i As Integer

x1(0) = 1

x2(0) = 1

t = 0

h = 0.1

tf = 100

Cells(1, 1) = t

Cells(1, 2) = x1(0)

Cells(1, 3) = x2(0)

For i = 0 To ((100 / h) - 1)

t = t + h

k11 = f1(x1(i), x2(i), CSng(t))

k12 = f2(x1(i), x2(i), CSng(t))

*dx21 = x1(i) + (h / 2) * k11*

*dx22 = x2(i) + (h / 2) * k12*

k21 = f1(CSng(dx21), CSng(dx22), CSng(t) + (h / 2))

k22 = f2(CSng(dx21), CSng(dx22), CSng(t) + (h / 2))

*dx31 = x1(i) + (h / 2) * k21*

$$dx32 = x2(i) + (h / 2) * k22$$

$$k31 = f1(CSng(dx31), CSng(dx32), CSng(t) + (h / 2))$$

$$k32 = f2(CSng(dx31), CSng(dx32), CSng(t) + (h / 2))$$

$$dx41 = x1(i) + h * k31$$

$$dx42 = x2(i) + h * k32$$

$$k41 = f1(CSng(dx41), CSng(dx42), CSng(t) + h)$$

$$k42 = f2(CSng(dx41), CSng(dx42), CSng(t) + h)$$

$$x1(i + 1) = x1(i) + (h / 6) * (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 + k41)$$

$$x2(i + 1) = x2(i) + (h / 6) * (k12 + 2 * k22 + 2 * k32 + k42)$$

$$Cells(i + 1, 1) = t$$

$$Cells(i + 1, 2) = x1(i + 1)$$

$$Cells(i + 1, 3) = x2(i + 1)$$

Next i

End Sub

8. Modelo Dinâmico de Emissão de CO2 para a Itália

Function f1(co2 As Double, gdp As Double, f As Double, r As Double, s As Double, alfa1 As Double, alfa2 As Double, u1 As Double, u2 As Double, gama As Double, h As Double, t As Integer) As Double

*f1 = r * co2 * (1 - (co2 / s)) - alfa1 * f + (alfa2 - u2) * gdp*
End Function

Function f2(co2 As Double, gdp As Double, f As Double, r As Double, s As Double, alfa1 As Double, alfa2 As Double, u1 As Double, u2 As Double, gama As Double, h As Double, t As Integer) As Double

*f2 = u1 * gdp - h * f*
End Function

Function f3(co2 As Double, gdp As Double, f As Double, r As Double, s As Double, alfa1 As Double, alfa2 As Double, u1 As Double, u2 As Double, gama As Double, h As Double, t As Integer) As Double

*f3 = gama * gdp*
End Function

Sub co2()

Dim i As Integer

Dim t As Single

Dim co2(0 To 5000), f(0 To 5000), gdp(0 To 5000) As Double

Dim r, s, alfa1, alfa2, u1, u2, h, gama As Double

t = 1

h = 0.01

m = 0.0001

co2(0) = 11.313 ' emissão

f(0) = 0.005625 ' área de floresta

gdp(0) = 1.64957 ' pib

u1 = 0.00012 ' porcentagem para reflorestamento

u2 = 0.0008 ' porcentagem para clean_tech

s = 120 ' capacidade da atmosfera

r = 0.45 ' taxa de emissão

gama = 0.01 ' crescimento do pib

$alfa1 = 0.0006$ ' qnto floresta remove de $co2$
 $alfa2 = 0.0005$ ' relação pib produção de $co2$

For $i = 0$ To 4999

$t = t + h$

$k11 = f1(CDbl(co2(i)), CDbl(gdp(i)), CDbl(f(i)), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$k12 = f2(CDbl(co2(i)), CDbl(gdp(i)), CDbl(f(i)), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$k13 = f3(CDbl(co2(i)), CDbl(gdp(i)), CDbl(f(i)), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$dx21 = co2(i) + (h / 2) * k11$

$dx22 = f(i) + (h / 2) * k12$

$dx23 = gdp(i) + (h / 2) * k12$

$k21 = f1(CDbl(dx21), CDbl(dx22), CDbl(dx23), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$k22 = f2(CDbl(dx21), CDbl(dx22), CDbl(dx23), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$k23 = f3(CDbl(dx21), CDbl(dx22), CDbl(dx23), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$dx31 = co2(i) + (h / 2) * k21$

$dx32 = f(i) + (h / 2) * k22$

$dx33 = gdp(i) + (h / 2) * k22$

$k31 = f1(CDbl(dx31), CDbl(dx32), CDbl(dx33), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$k32 = f2(CDbl(dx31), CDbl(dx32), CDbl(dx33), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$k33 = f3(CDbl(dx31), CDbl(dx32), CDbl(dx33), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$$dx41 = co2(i) + h * k31$$

$$dx42 = f(i) + h * k32$$

$$dx43 = gdp(i) + h * k32$$

$k41 = f1(CDbl(dx41), CDbl(dx42), CDbl(dx43), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$k42 = f2(CDbl(dx41), CDbl(dx42), CDbl(dx43), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$k43 = f3(CDbl(dx41), CDbl(dx42), CDbl(dx43), CDbl(r), CDbl(s),$
 $CDbl(alfa1), CDbl(alfa2), CDbl(u1), CDbl(u2), CDbl(gama), CDbl(m),$
 $CIInt(t))$

$co2(i + 1) = co2(i) + (h / 6) * (k11 + 2 * k21 + 2 * k31 +$
 $k41)$

$$f(i + 1) = f(i) + (h / 6) * (k12 + 2 * k22 + 2 * k32 + k42)$$

$$gdp(i + 1) = gdp(i) + (h / 6) * (k13 + 2 * k23 + 2 * k33 + k43)$$

$$Cells(i + 1, 1) = t$$

$$Cells(i + 1, 2) = co2(i + 1)$$

$$Cells(i + 1, 3) = f(i + 1)$$

$$Cells(i + 1, 4) = gdp(i + 1)$$

$$Worksheets("plan2").Cells(i + 2, 3) = co2(i + 1)$$

Next i

End Sub

8. Modelo Dinâmico de Emissão de CO2 para a Itália pelo MatLab

```
"f.m":  
  
function dx = f(t,y)  
    global h  
    global u1  
    global u2  
    global s  
    global r  
    global gama  
    global alfa1  
    global alfa2  
  
    % valores iniciais  
    co2 = y(1);  
    f = y(2);  
    gdp = y(3);  
  
    % modelo  $dx = [ r * co2 * (1 - (co2 / s)) - alfa1 * f + (alfa2 -$   
 $u2) * gdp ; u1 * gdp - h * f ; gama * gdp ]$ ;
```

Núcleo do Programa:

```
type f;  
  
global h  
global u1  
global u2  
global s  
global r  
global gama  
global alfa1  
global alfa2  
  
% PARÂMETROS  
h = 0.0001; % desmatamento  
u1 = 0.0011; % porcentagem do PIB para reflorestamento  
u2 = 0.0008; % porcentagem do PIB para clean tech  
s = 120; % saturação atmosférica
```

```

r = 0.15; % taxa de emissão
gama = 0.044; % crescimento do PIB
alfa1 = 0.0006; % capacidade de remoção de CO2 de F
alfa2 = 0.0005; % relação PIB com a produção de CO2

% CONDIÇÕES INICIAIS
t0 = 1950;
tfinal = 2007;
y0 = [11.313 56 164.957];

% INTEGRAÇÃO NUMÉRICA
options = odeset('RelTol', 1e-6, 'AbsTol', [1e-6]);
[t,y] = ode45('f', [t0 tfinal],y0,options);

% CARREGANDO DADOS REAIS
load c:/real_italia.txt
load c:/floresta_italia.txt
load c:/italia_pib.txt

real = real_italia;
pib = italia_pib;
fl = floresta_italia;
t2 = real(:,1);

% GRÁFICO DE EMISSÃO DE CO2
subplot(311) plot(t,y(:,1), '*b')
hold on
plot(real(:,1),real(:,2), '.r')
title('Itália')
xlabel('Ano')
ylabel('CO2 Atmosférico')
legend({'Simulação', 'Real'}, 'Location', 'EastOutside');
grid

% GRÁFICO DE FLORESTA
subplot(312)
plot(t,y(:,2), '*b')
hold on
plot(fl(:,1),fl(:,2), '.r')
xlabel('Ano')

```

```
ylabel('Área Florestada')
legend({'Simulação', 'Real'}, 'Location', 'EastOutside');
grid

% GRÁFICO DE PIB
subplot(313)
plot(t,y(:,3), '*b')
hold on
plot(pib(:,1),pib(:,2), '.r')
xlabel('Ano')
ylabel('PIB')
legend({'Simulação', 'Real'}, 'Location', 'EastOutside');
grid

clc;
```


10. Parâmetros para Simulações

Itália:

$h = 0.0001$; % desmatamento
 $u1 = 0.0011$; % porcentagem do PIB para reflorestamento
 $u2 = 0.0008$; % porcentagem do PIB para clean tech
 $s = 120$; % saturação atmosférica
 $r = 0.15$; % taxa de emissão
 $\text{gama} = 0.044$; % crescimento do PIB
 $\text{alfa1} = 0.0006$; % capacidade de remoção de CO₂ de F
 $\text{alfa2} = 0.0005$; % relação PIB com a produção de CO₂

Alemanha:

$h = 0.0008$; % desmatamento
 $u1 = 0.0003$; % porcentagem do PIB para reflorestamento
 $u2 = 0.0008$; % porcentagem do PIB para clean tech
 $s = 200$; % saturação atmosférica
 $r = 0.12$; % taxa de emissão
 $\text{gama} = 0.053$; % crescimento do PIB
 $\text{alfa1} = 0.0006$; % capacidade de remoção de CO₂ de F
 $\text{alfa2} = 0.0005$; % relação PIB produção de CO₂

Reino Unido:

$h = 0.0001$; % desmatamento
 $u1 = 0.0017$; % porcentagem do PIB para reflorestamento
 $u2 = 0.0008$; % porcentagem do PIB para clean tech
 $s = 170$; % saturação atmosférica
 $r = 0.12$; % taxa de emissão
 $\text{gama} = 0.033$; % crescimento do PIB
 $\text{alfa1} = 0.0004$; % capacidade de remoção de CO₂ de F
 $\text{alfa2} = 0.0005$; % relação PIB produção de CO₂

11. Parâmetros para as Simulações de Otimização

Primeiro exemplo para a Itália:

```
alfa1 = 0.0006  
alfa2 = 0.0005  
a = 0.00008  
b = 0.4  
c = 1  
h = 0.0001  
s = 100  
r = 0.1  
gama = 0.044
```

Primeiro exemplo para a França:

```
alfa1 = 0.0006  
alfa2 = 0.0005  
a = 0.00008  
b = 0.4  
c = 1  
h = 0.00001  
s = 100  
r = 0.1  
gama = 0.032
```

Segundo exemplo para a Itália:

```
final = 0  
final2 = 90  
a = 0  
b = 4e9  
c = 1e9  
h = 0.0001  
s = 100  
r = 0.1  
delta = 0.1  
gama = 0.044  
alfa1 = 0.0006  
alfa2 = 0.0005
```

$$T = 30$$

Exemplo seguinte para a Alemanha:

$$\text{final} = 62$$

$$a = 0.1$$

$$b = 4e9$$

$$c = 1e9$$

$$h = 0.0008$$

$$s = 200$$

$$r = 0.12$$

$$\text{delta} = 0.000001$$

$$\text{gama} = 0.044$$

$$\text{alfa1} = 0.0006$$

$$\text{alfa2} = 0.0005$$

$$T = 15$$